А. А. Черняк
Ж. А. Черняк
Ю. А. Доманова

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

ГЕОМЕТРИЯ

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2005

УДК 372.8(076.1)
ББК 74.26я729
Ч-49

Черняк А. А., Черняк Ж. А., Доманова Ю. А.

Ч-49 Подготовка к тестированию. Геометрия. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 240 с.: ил.

ISBN 5-94157-534-3

Материал книги систематизирован по наборам геометрических теорем и формул, имеющих единую доказательную базу: метрические и угловые соотношения, теоремы о площадях и пропорциональные соотношения в плоских фигурах; прямые и плоскости в пространстве; площади и объемы фигур; вписанные и описанные фигуры; ортогональные проекции, прямоугольная декартова система координат; векторы. Каждый урок имеет единую структуру: основные теоремы и формулы ("Учим наизусть"), определения геометрических объектов ("Вспоминаем определения"), демонстрационные задачи ("Решаем вместе"), задачи для самостоятельного решения ("Решаем сами") и ответы к ним ("Сверяем ответы"), задачи для самопроверки ("Тестируем себя").

Для абитуриентов, учащихся старших классов общеобразовательных и специализированных школ, учителей и репетиторов

УДК 372.8(076.1)
ББК 74.26я729

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Нина Седых*
Компьютерная верстка	*Натальи Смирновой*
Корректор	*Наталия Першакова*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 24.11.04.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,35.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-534-3

Содержание

Предисловие

В последнее время качественно меняются условия выпускных и вступительных экзаменов по математике, приближаясь к более объективной своей форме — централизованному тестированию. Такие изменения диктуют и новые методы подготовки к этим серьезным испытаниям. Тестовые задания составляются так, что даже небольшие пробелы в знаниях ведут к существенным потерям в баллах.

Для успешного решения разнообразных задач за ограниченный промежуток времени выпускник обязан:

- иметь отработанную технику "ручного" счета и владеть эффективными алгоритмами решения стандартных задач;
- помимо формальных знаний формул и теорем, демонстрировать определенный уровень математической культуры и геометрической интуиции, позволяющие решать задачи незнакомого типа, в том числе и нестандартные.

Геометрия — наиболее уязвимое звено школьной математики с точки зрения успешного приобретения упомянутых выше навыков. Это связано как с обилием различных типов геометрических задач, так и с многообразием приемов и методов их решения. Учитывая все это, авторы пособия систематизировали приведенный материал не по типам геометрических фигур (треугольники, параллелограммы, квадраты и т. п.), а по наборам геометрических теорем и формул, опирающихся на единую доказательную базу и потому имеющих схожие мотивы для использования их при решении соответствующих типов задач.

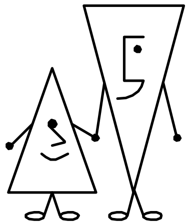
Материал пособия разбит на 9 уроков. В каждом уроке в виде опорных сигналов приводятся основные теоремы и формулы (разделы "Учим наизусть") и определения тех геометрических объектов, которые школьники обычно либо забывают, либо путают (разделы "Вспоминаем определения"). Далее приводится разбор решений демонстрационных задач, использующих основные теоремы и формулы данного урока (раздел "Решаем вместе"). Затем следуют представительный список задач для самостоятельного решения (раздел "Решаем сами") и ответы к ним (раздел "Сверяем ответы"). Урок завершается списком задач различной сложности, оцененных в баллах и предназначенных для самопроверки (раздел "Тестируем себя сами").

Возможно, кто-то не сумеет добраться до "вершины пирамиды", и некоторые из задач покажутся "неберущимися" — здесь важно понять, что успехи зависят как от начального багажа знаний, так и от врожденных способностей к математике, но более всего — от трудолюбия и настойчивости.

Книга написана авторским коллективом профессиональных математиков в составе доктора физико-математических наук, профессора Черняка Аркадия Александровича, кандидата физико-математических наук, доцента Черняк Жанны Альбертовны и старшего преподавателя Домановой Юлии Анатольевны.

Урок 1

Метрические соотношения в плоских фигурах



Учим наизусть

Метрические соотношения в треугольниках

Всюду в этом уроке a, b, c — длины сторон BC, AC, AB $\triangle ABC$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$, R — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности, r — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности (рис. 1.1).

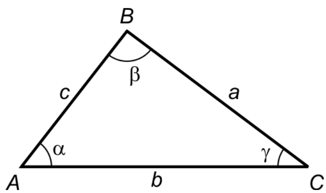


Рис. 1.1. Треугольник ABC

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

Теорема Пифагора (или теорема косинусов для прямоугольного $\triangle ABC$ с прямым $\angle A$):

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Длина h_a высоты $\vartriangle ABC$, проведенной из вершины A, равна

$$h_a = \frac{2S_{\vartriangle ABC}}{a}.$$

Длина m_a медианы $\vartriangle ABC$, проведенной из вершины A (рис. 1.2), равна

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

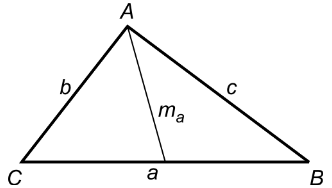


Рис. 1.2. Медиана треугольника m_a

Длина l_a биссектрисы $\vartriangle ABC$, проведенной из вершины A, равна

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b + c}.$$

Если a_1, a_2 являются длинами отрезков, на которые биссектриса угла A делит сторону BC (рис. 1.3), то

$$l_a = \sqrt{bc - a_1 a_2}.$$

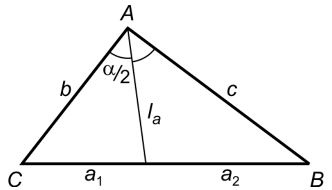


Рис. 1.3. Биссектриса треугольника ABC

В равностороннем $\vartriangle ABC$

$$h_a = m_a = l_a = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ \ R = \frac{a}{\sqrt{3}};\ \ r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

В равнобедренном треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведенные к основанию, совпадают.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине его гипотенузы, при этом радиус описанной окружности равен длине медианы, проведенной к гипотенузе, т. е.

$$R = m_a = \frac{a}{2},$$

где a — длина гипотенузы (рис. 1.4).

В прямоугольном $\triangle ABC$

$$r = \frac{b + c - a}{2}; \; h_a = \frac{bc}{a} = \sqrt{xy},$$

где a — длина гипотенузы; x, y — длины отрезков, на которые гипотенуза делится высотой, проведенной из вершины A.

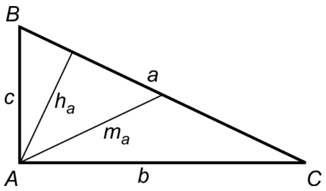


Рис. 1.4. Медиана и высота прямоугольного треугольника *ABC*

Зависимости между углами и сторонами прямоугольного треугольника выглядят так:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}; \; \cos\beta = \frac{c}{a}; \; \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}; \; \operatorname{ctg}\beta = \frac{c}{b}.$$

Два треугольника равны, если они имеют равные:

- соответствующие стороны, или
- две стороны и угол между ними, или
- сторону и два прилежащих к ней угла.

Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины его боковых сторон. Средняя линия параллельна основанию, а ее длина равна половине длины основания.

Решаем вместе

Задача 1. Длины двух сторон треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей стороны.

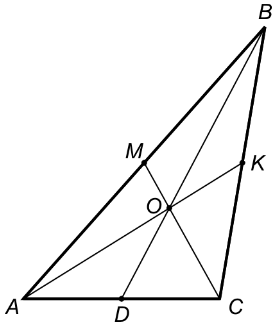


Рис. 1.5. Рисунок к задаче 1

Решение. Пусть AK и CM — медианы, O — точка их пересечения (рис. 1.5), $BC = 6$, $AB = 8$, $AC = x$. По условию $AK \perp CM$. Следовательно, $\triangle AOC$ — прямоугольный. Проведем медиану BD. Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке, то BD пройдет через точку O. Тогда OD — медиана в $\triangle AOC$, т. е. $OD = \frac{AC}{2} = \frac{x}{2}$. Но $BO : OD = 2 : 1$ (свойство точки пересечения медиан — *см. Урок 4*), откуда $BO = x$, $BD = \frac{3}{2}x$.

Итак, по формуле медианы:

$$BD^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot BC^2 + 2 \cdot AB^2 - AC^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 = \frac{1}{4}(200 - x^2) \Leftrightarrow x^2 = 20 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Задача 2. Найти длину биссектрисы прямого угла в прямоугольном треугольнике с катетами c и b.

Решение. Пусть x — длина биссектрисы прямого угла данного треугольника. Согласно формуле биссектрисы

$$x = \frac{2bc \cdot \cos\frac{90^\circ}{2}}{b+c} = \frac{2bc \cdot \cos 45^\circ}{b+c} = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$.

Задача 3. В треугольнике длины двух сторон равны 6 и 3. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

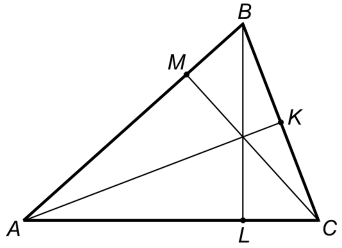


Рис. 1.6. Рисунок к задаче 3

Решение. Пусть $AB = 3$, $BC = 6$, $AC = x$ и AK, BL, CM — высоты $\triangle ABC$ (рис. 1.6). Тогда

$$AK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3}; \quad CM = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{3}.$$

По условию

$$2 \cdot BL = AK + CM = \frac{S_{\triangle ABC}}{3} + \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC}.$$

Но $BL = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{x}$. Поэтому

$$\frac{4S_{\triangle ABC}}{x} = S_{\triangle ABC} \iff x = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 4. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны r и R соответственно. Найти его площадь.

Решение. Пусть b, c — катеты данного прямоугольного треугольника, a — его гипотенуза. Тогда $R = \frac{a}{2}$, $r = \frac{b+c-a}{2}$. Отсюда

$$r = \frac{b+c-2R}{2} \Leftrightarrow 2r + 2R = b + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(r+R)^2 = (b+c)^2 \Rightarrow 4(r+R)^2 = b^2 + c^2 + 2bc.$$

Но площадь x данного треугольника равна $\frac{bc}{2}$ и $b^2 + c^2 = a^2 = 4R^2$ (теорема Пифагора). Поэтому

$$4(r+R)^2 = (b^2 + c^2) + 4\left(\frac{bc}{2}\right) = 4R^2 + 4x \Rightarrow x = r^2 + 2Rr.$$

Ответ: $r^2 + 2Rr$.

Задача 5. В $\triangle ABC$ $AC = 10$, синус $\angle A$ равен 0,25, а расстояние от центра окружности, описанной около этого треугольника, до стороны AC равно 12. Найти длину стороны BC.

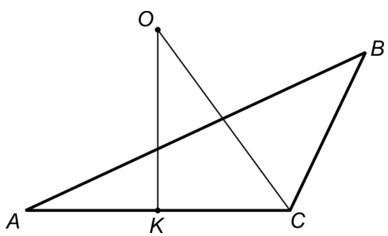


Рис. 1.7. Рисунок к задаче 5

Решение. Пусть O — центр описанной окружности, $OK \perp AC$ (рис. 1.7). Тогда

$$CO = \sqrt{OK^2 + KC^2} = \sqrt{144 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = 13,$$

т. к. OK — срединный перпендикуляр к стороне AC (центр описанной окружности находится на пересечении срединных перпендикуляров). CO — радиус описанной окружности, тогда по теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2\cdot CO \Rightarrow BC = 2\cdot CO\cdot\frac{1}{4} = 6{,}5.$$

Ответ: 6,5.

Задача 6. В $\triangle ABC$ $AC = b$, $AB = c$, AD — биссектриса, причем $AD = BD$ (рис. 1.8). Найти длину биссектрисы AD.

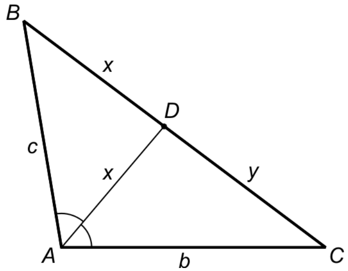


Рис. 1.8. Рисунок к задаче 6

Решение. Обозначим: $AD = BD = x$, $DC = y$, $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$. По теореме синусов, примененной к $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, имеем:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\angle ADB};\ \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\angle ADC}.$$

Разделим почленно эти равенства и, учитывая, что $\sin\angle ADC = \sin(180^\circ - \angle ADB) = \sin\angle ADB$, получим: $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$ (это известная теорема о биссектрисе угла треугольника — *см. Урок 4*). Отсюда по формуле длины биссектрисы

$$x = \sqrt{bc - xy} \Rightarrow x = \sqrt{bc - \frac{x^2 b}{c}} \Rightarrow cx^2 = bc^2 - x^2 b \Rightarrow x = c\sqrt{\frac{b}{b+c}}.$$

Ответ: $c\sqrt{\frac{b}{b+c}}$.

Задача 7. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найти расстояние между центром вписанной в этот треугольник окружности и точкой пересечения его медиан (рис. 1.9).

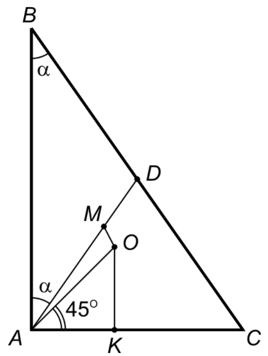


Рис. 1.9. Рисунок к задаче 7

Решение. Пусть $\angle A = 90°$, $\angle B = \alpha$, AD — медиана $\triangle ABC$, O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, M — точка пересечения медиан. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Так как в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $AD = 5$, $AM = \frac{2}{3} \cdot AD = \frac{10}{3}$ (напомним, что точка пересечения медиан треугольника делит их в отношении 2 : 1, считая от вершины — *см. Урок 4*). Поскольку $BD = AD$, то $\angle BAD = \alpha$. Но AO — биссектриса угла A. Поэтому $\angle BAO = 45°$, $\angle MAO = 45° - \alpha$. Соединим радиусом OK точку O с точкой касания вписанной окружности со стороной AC. Тогда по формуле радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник,

$$OK = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2; \quad AO = \frac{OK}{\sin 45°} = 2\sqrt{2}.$$

По теореме косинусов для $\triangle AMO$

$$MO^2 = AM^2 + AO^2 - 2 \cdot AM \cdot AO \cdot \cos(45° - \alpha) =$$

$$= \frac{172}{9} - \frac{40\sqrt{2}}{3} \cos(45° - \alpha).$$

Вычислим отдельно $\cos(45° - \alpha)$:

$$\cos(45° - \alpha) = \cos 45° \cdot \cos\alpha + \sin 45° \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{6}{10} + \frac{8}{10}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

Отсюда $MO^2 = \frac{172}{9} - \frac{40\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{30} = \frac{4}{9}$, $MO = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача 8. В прямоугольном треугольнике найти наименьшее из отношений катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла (рис. 1.10), относятся как 40 : 41.

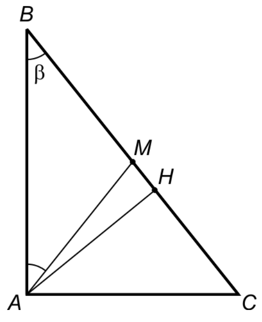


Рис. 1.10. Рисунок к задаче 8

Решение. Пусть в прямоугольном $\triangle ABC$ $\angle A = 90°$, AH — высота, AM — медиана, $\angle B = \beta$. Тогда $\angle BAM = \beta$, т. к. $AM = BM$. Отсюда $\angle AMH =$ $= 180° - (180° - 2\beta) = 2\beta$.

В $\triangle AMH$, согласно условию,

$$\sin\angle AMH = \frac{AH}{AM} = \frac{40}{41} \Leftrightarrow \sin 2\beta = \frac{40}{41} \Rightarrow \frac{2\,\mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}^2\beta} = \frac{40}{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 20\cdot \mathrm{tg}^2\beta - 41\cdot \mathrm{tg}\,\beta + 20 = 0\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,\beta = 1{,}25\\ \mathrm{tg}\,\beta = 0{,}8\end{array}\right. .$$

Так как $\mathrm{tg}\,\beta$ и есть отношение катетов $\triangle ABC$, то меньший катет относится к большему, как 0,8.

Ответ: 0,8.

Задача 9. В правильный $\triangle ABC$ вписан правильный $\triangle DEF$ так, что вершина D лежит на стороне BC, вершина E — на стороне AC, вершина F — на стороне AB (рис. 1.11). Длины сторон BC и DE относятся как 8 : 5. Найти синус $\angle DEC$.

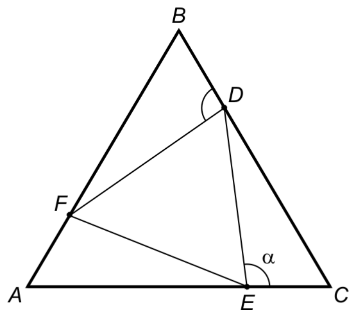


Рис. 1.11. Рисунок к задаче 9

Решение. Обозначим $\angle DEC = \alpha$. Тогда

$$\angle FDB = 180° - (60° + \angle EDC) = 180° - (60° + 180° - (60° + \alpha)) = \alpha.$$

Следовательно, $\triangle EDC = \triangle FDB$ (они имеют по равной стороне FD, DE и равны два прилежащих к этой стороне угла). Отсюда $EC = BD$, $BC = EC + DC$. $\angle EDC = 180° - \angle DCE = 180° - 60° - \alpha = 120° - \alpha$. По теореме синусов для $\triangle EDC$

$$\frac{EC}{\sin(120°-\alpha)} = \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{DE}{\sin 60°}\ \Rightarrow\ BC = \frac{DE\cdot\sin(120°-\alpha) + DE\cdot\sin\alpha}{\sin 60°}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5} = \frac{BC}{DE} = \frac{\sin(120°-\alpha)+\sin\alpha}{\sin 60°} = \frac{2\sin 60°\cdot\cos(60°-\alpha)}{\sin 60°} =$$

$$= 2\cos(60^\circ - \alpha) \Rightarrow \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{4}{5},\ \sin(60^\circ - \alpha) = \pm\frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = \dfrac{8}{5} \\ \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha = \pm\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\cos\alpha + 3\sin\alpha = \dfrac{8\sqrt{3}}{5} \\ \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha = \pm\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sin\alpha = \left(\frac{8\sqrt{3}}{5} \mp \frac{6}{5}\right) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4\sqrt{3} \mp 3}{10}.$$

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{3} \mp 3}{10}$.

Вспоминаем определения и простейшие свойства

Параллелограмм — это четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Признаки параллелограмма: четырехугольник является параллелограммом, если и только если:

- его противоположные стороны попарно равны, или
- пара противоположных сторон имеет одинаковую длину и параллельна, или
- диагонали точкой пересечения делятся пополам, или
- противоположные углы попарно равны.

Параллелограмм является ромбом, если у него:

- все стороны равны, или
- диагонали взаимно перпендикулярны, или
- диагонали являются биссектрисами соответствующих углов.

В ромб всегда можно вписать окружность, центр которой лежит в точке пересечения диагоналей.

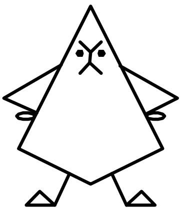
Параллелограмм является прямоугольником, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- все его углы прямые;
- его диагонали равны.

Около прямоугольника всегда можно описать окружность, центр которой находится в точке пересечения диагоналей, а радиус равен длине половины диагонали.

Прямоугольник является квадратом, если длины всех его сторон равны. В квадрат можно вписать окружность и описать около него окружность.

Трапеция — это четырехугольник, две противоположные стороны (основания) которого параллельны, а две другие (боковые стороны) непараллельны.



Учим наизусть
Метрические соотношения в четырехугольниках

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции (средняя линия трапеции), параллелен ее основаниям, а его длина равна полусумме длин оснований.

В четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин его противоположных сторон, т. е.

$$d_1 d_2 = ac + bd,$$

где a, b, c, d — длины сторон четырехугольника; d_1, d_2 — длины его диагоналей.

В ромбе произведение длин диагоналей равно учетверенному произведению длины его стороны на радиус вписанной окружности.

Если в многоугольник, стороны которого можно пронумеровать последовательно числами 1, 2, ..., $2n$, вписана окружность, то сумма длин его сторон с нечетными номерами равна сумме длин его сторон с четными номерами. В частности, если четырехугольник описан около окружности, то суммы длин его противоположных сторон равны. Верно и обратное: четырехугольник можно описать около окружности, если суммы длин его противоположных сторон равны.

Решаем вместе

Задача 10. Длины диагоналей параллелограмма равны 17 и 19. Длина одной из его сторон равна 10. Найти длину другой стороны.

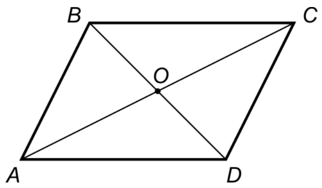


Рис. 1.12. Рисунок к задаче 10

Решение. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей (рис. 1.12), $AC = 19$, $BD = 17$. Так как диагонали делятся точкой пересечения пополам, то $OA = \frac{19}{2}$, $OD = \frac{17}{2}$. Далее применим теорему косинусов к $\triangle OAD$ и $\triangle ODC$:

$$AD^2 = OA^2 + OD^2 - 2 \cdot OA \cdot OD \cdot \cos\angle AOD;$$

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos(180^\circ - \angle AOD) =$$

$$= OA^2 + OD^2 + 2 \cdot OA \cdot OD \cdot \cos\angle AOD,$$

т. к. $OC = OA$. Отсюда

$$AD^2 + CD^2 = 2 \cdot OA^2 + 2 \cdot OD^2 = 325.$$

Но длина одной из сторон по условию равна 10 (пусть это будет AD). Поэтому $CD = \sqrt{325 - 100} = 15$.

Ответ: 15.

Задача 11. Длины диагоналей ромба относятся как 3 : 4. Во сколько раз сторона ромба превосходит радиус вписанной в него окружности?

Решение. Пусть d_1, d_2 — длины диагоналей ромба, a — длина его стороны, r — радиус вписанной в него окружности. Так как ромб является параллелограммом, то

$$d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2(a^2 + a^2) = 4a^2.$$

Кроме того, $d_1 d_2 = 4ar$. Разделив почленно эти два равенства, имеем:

$$\frac{d_1^{\,2} + d_2^{\,2}}{d_1 d_2} = \frac{4a^2}{4ar} \;\Rightarrow\; \frac{d_1^{\,2}}{d_1 d_2} + \frac{d_2^{\,2}}{d_1 d_2} = \frac{a}{r} \;\Rightarrow\; \frac{d_1}{d_2} + \frac{d_2}{d_1} = \frac{a}{r}.$$

Но по условию $\frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{4}$. Поэтому $\frac{a}{r} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.

Ответ: $\frac{25}{12}$.

Задача 12. В окружность вписан равносторонний $\triangle ABC$. На дуге AC взята произвольная точка M (рис. 1.13). Длины отрезков MA и MB равны соответственно a и b. Найти длину MC.

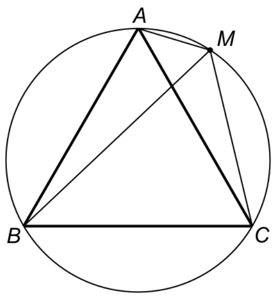


Рис. 1.13. Рисунок к задаче 12

Решение. Так как четырехугольник $ABCM$ является вписанным в окружность, то

$$AC \cdot MB = MA \cdot BC + MC \cdot AB.$$

Поскольку $AB = BC = AC$, то последнее равенство можно записать в виде:

$$AC \cdot MB = MA \cdot AC + MC \cdot AC \;\Rightarrow\; MB = MA + MC \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; MC = MB - MA = b - a.$$

Ответ: $b - a$.

Задача 13. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна S, острый угол при основании трапеции равен 30°. Найти длину боковой стороны трапеции.

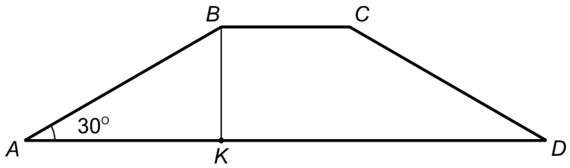


Рис. 1.14. Рисунок к задаче 13

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция, $\angle BAD = 30°$. Проведем высоту BK (рис. 1.14). Тогда

$$AB = \frac{BK}{\sin 30°} = 2 \cdot BK.$$

Так как трапеция описана около окружности, то

$$BC + AD = AB + CD = 2 \cdot AB = 4 \cdot BK.$$

Далее,

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = \frac{4 \cdot BK}{2} \cdot BK = 2 \cdot BK^2.$$

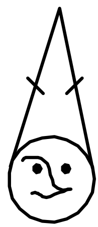
Отсюда

$$BK = \sqrt{\frac{S}{2}} \Rightarrow AB = 2 \cdot BK = \sqrt{2S}.$$

Ответ: $\sqrt{2S}$.

Учим наизусть

Метрические соотношения, связанные с окружностями



Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, т. е. если хорды AB и CD пересекаются в точке O (рис. 1.15), то $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.