С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин

Задачи по дискретной математике

Теоретическая часть: основные положения и терминология

Схема информационной зависимости материала книги

Дифференцированные по уровню сложности задания

Задачи, связанные со спецификой информационно-коммуникационных технологий

Дополнительная справочная информация

С. В. Борзунов
С. Д. Кургалин

Задачи по дискретной математике

Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки ВО 03.03.03 — Радиофизика

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2016

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Б82

Борзунов, С. В.

Б82 Задачи по дискретной математике / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. — СПб.: БХВ-Петербург, 2016. — 528 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-3672-1

В учебном пособии даны задачи и упражнения вузовского курса дискретной математики, включая разделы, связанные со спецификой информационно-коммуникационных технологий. В каждой главе приводятся теоретические сведения, необходимые для решения задач разного уровня сложности, ответы и во многих случаях подробные пояснения к решениям.

Для студентов и преподавателей профильных вузов

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73

Рецензенты:

А.Г. Буховец — д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики и математических методов в экономике Воронежского государственного аграрного университета им. императора Петра I

В.Г. Курбатов — д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры гуманитарных и естественно-научных дисциплин Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Липецкий филиал)

Подписано в печать 30.10.15.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 33.
Тираж 800 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-3672-1

Оглавление

Предисловие

Текущий период характерен бурным развитием информационно-коммуникационных технологий. Подготовка специалистов в области таких технологий, отвечающих требованиям времени, приводит к необходимости уделить особое внимание их математическому образованию. При этом желательно сформировать задания, предлагаемые в качестве практической части математических курсов, таким образом, чтобы их выполнение, в конечном итоге, привело к получению студентами нужных компетенций. Одним из математических курсов, который преподается, как правило, в начальных семестрах, является курс дискретной математики. Ряд общих курсов и специальных дисциплин, входящих в цикл подготовки специалиста в области информационных технологий, базируется на этом курсе. Так, математическая логика и теория алгоритмов образуют теоретическую основу информатики, булева алгебра лежит в основе методов разработки электронных схем, теория графов используется при построении многопроцессорных вычислительных систем, компьютерных сетей и в программировании. Научить студентов грамотному применению полученных теоретических знаний на практике — это одна из методических задач, решению которой может помочь предлагаемое пособие.

Учебное пособие создавалось в течение нескольких лет с использованием опыта преподавания этого курса на факультете компьютерных наук Воронежского государственного университета. Его содержание соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам по направлениям подготовки «Информационные системы и технологии», «Программная инженерия», «Радиофизика». Известные задачники по курсам дискретной математики и математической логики по объему и охвату материала пока не в полной мере ориентированы на подготовку специалистов именно по указанным направлениям, поэтому в данной книге предлагается большое число разнообразных задач широкого спектра сложности для этих направлений.

Настоящее учебное пособие предназначено для проведения практических, лабораторных занятий и для самостоятельной работы. Оно содержит базовые теоретические представления и методы решения основных типов задач, формирует представления о множествах, об отношениях на множествах и свойствах различных видов отношений, о функциях, основных понятиях комбинаторики, теории графов, булевой алгебре, основах теории алгоритмов и т. д. Некоторые из глав пособия, например «Машина Тьюринга» и «Асимптотический анализ», выходят за пределы «традиционного» курса дискретной математики. Тем не менее, мы считаем необходимым включение их в состав пособия, поскольку они содействуют пониманию методов построения и анализа алгоритмов. Согласно известному тезису Чёрча–Тьюринга, машина Тьюринга способна имитировать все возможные способы пошагового вычисления и является моделью любых существующих в настоящее время вычислительных машин. Теория асимптотического анализа алгоритмов изучает методы получения асимптотических оценок вычислительной сложности алгоритмов, что имеет определяющее значение для оценки потребности в ресурсах при конкретной реализации алгоритма.

Естественно, что при подготовке книги мы проанализировали известные учебники и задачники с целью использования содержащегося в них положительного опыта для выработки наиболее эффективного способа представления материала. Многие из них перечислены в списке литературы, в особенности — это [4, 17, 71].

Учебное пособие соответствует двухсеместровому курсу обучения, отдельные его главы можно использовать и в курсах, продолжающихся один семестр. Предполагается, что в дальнейшем пособие послужит основой для создания учебно-методического комплекса по курсу дискретной математики для вышеназванных направлений.

Для освоения материала требуется знание основ математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры, а для глав 9, 12 и 13 также и основных конструкций языка программирования Delphi.

Каждая глава начинается с теоретической части, которая, хотя и занимает сравнительно небольшой объем, но является важной, поскольку в ней напоминаются основные положения курса и задается используемая терминология. В тексте, наряду с основными определениями, теоретическими положениями и формулами, содержатся указания по их практическому использованию. Далее проводится подробный разбор нескольких типовых задач и даются задачи для решения в аудитории (компьютерном классе). Их можно использовать и для самостоятельной работы. Ответы или решения приводятся для всех задач, кроме самых простых. Упражнения существенно различаются по своей сложности. Наиболее трудные из них выделены с помощью символа «звездочка» ($*$), помещенного перед номером задания. Если в тексте теоретической части приводится пример, то его окончание обозначается знаком $\square$.

Отличительными особенностями учебного пособия, по нашему мнению, являются: подробный разбор задач, содержащих типовые методы и схемы вычислений; наличие большого количества упражнений и примеров широкого диапазона сложности; отражение в формулировках ряда заданий, где мы посчитали уместным, предметной области информационно-коммуникационных технологий. Кроме того, с учетом специфики подготовки бакалавров в области таких технологий при выполнении части заданий требуется реализовать разработанный алгоритм на конкретном языке программирования.

В главах «Понятие алгоритма. Корректность алгоритмов» и «Базовые алгоритмы» приводятся фрагменты программ на языке Delphi с целью демонстрации применимости изучаемых методов в практике программирования. Заголовки заданий главы «Базовые алгоритмы», которые мы рекомендуем для выполнения в компьютерном классе, выделены полужирным шрифтом.

Отдельная глава книги посвящена параллельным алгоритмам. Многопроцессорные вычислительные системы в настоящее время находят широкое применение для решения задач математического и компьютерного моделирования, управления базами данных, сложными комплексами и проч. Более того, большинство современных вычислительных систем поддерживают параллельные вычисления на аппаратном уровне. В связи с этим вопросы построения и анализа параллельных алгоритмов становятся все более актуальными. Следует отметить, что во многих случаях разработка эффективного параллельного алгоритма решения некоторой задачи требует привлечения новых идей и методов по сравнению с созданием последовательной версии алгоритма. Таковы, например, практически важные задачи поиска целевого элемента в структурах данных, вычисления значений алгебраических выражений и т. д. Теоретическая часть этой главы по сравнению с другими главами занимает относительно бо́льшее место, так как в ней рассматриваются достаточно сложные вопросы прикладных аспектов параллельного программирования, трудных при первоначальном усвоении. Данная глава требует уверенного владения методами решения задач, описанными в предыдущих главах, и имеет, по мнению авторов, повышенную сложность.

В пособии имеется достаточное число иллюстраций, помогающих наглядно представить изучаемые объекты и связи между ними. В заключительном разделе содержится справочная информация, включающая греческий алфавит, основные тригонометрические формулы, краткие сведения по дифференциальному и интегральному исчислению и важнейшие конечные суммы, что позволит снизить потребность в обращении к справочной литературе. Издание снабжено списком литературы, а также именным и предметным указателями. При упоминании в тексте фамилий ученых в ссылках приводятся их краткие биографические данные, взятые из источников [7, 117].

Ниже представлена схема информационной зависимости глав книги в виде ориентированного графа, отображающего предпочтительный порядок изучения учебного материала. Например, после изучения глав 1, 2 и 3 можно перейти к одной из трех глав: 4, 5 или 6, содержание которых является относительно независимым. Пунктирной границей отмечены главы, рассчитанные на читателей, желающих достичь высокого уровня овладения предметом, данные разделы содержат более сложный учебный материал. Так, после изучения главы 6 можно либо сразу перейти к главе 9, либо для лучшего усвоения последовательно разобрать материал глав 7 и 8 и только потом перейти к главе 9.

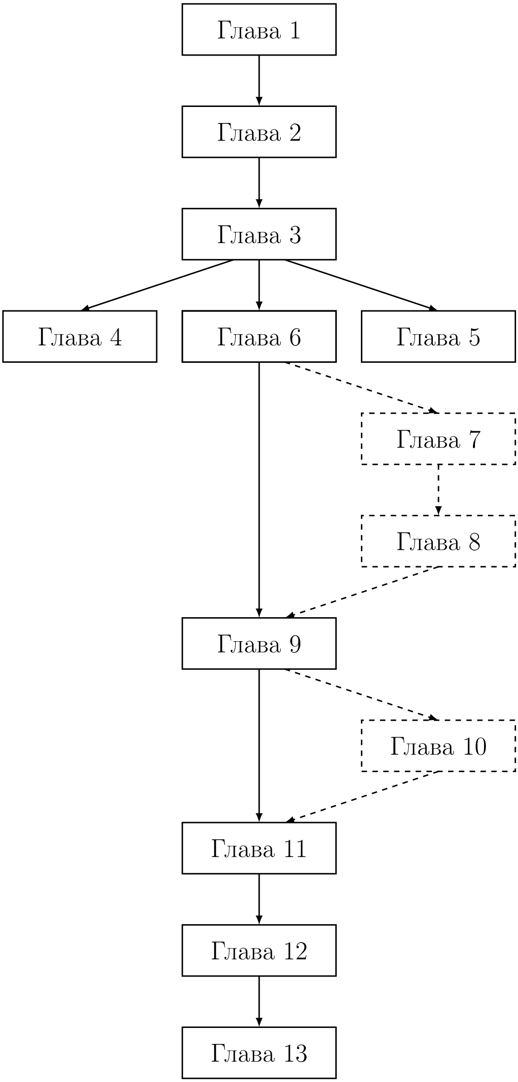

Схема информационной зависимости глав учебного пособия

Глава 1

Основы математической логики

Математическая логика — наука, изучающая математические доказательства [44, 49][1]. Предметами математической логики являются математические доказательства, методы и средства их построения [44].

Самый простой раздел математической логики — **логика высказываний**. **Высказыванием** называется утверждение, имеющее значение истинности, т. е. оно может быть *истинным* или *ложным* [19, 32, 65]. Соответствующие значения истинности будем обозначать как И и Л.

Составное высказывание может быть построено из простых высказываний с помощью логических операций и скобок. Наиболее часто используемыми логическими операциями являются: **и** (*конъюнкция* или *логическое умножение*), **или** (*дизъюнкция* или *логическое сложение*), **если ... то** (*логическое следствие* или *импликация*, эта операция обозначается также «$\Rightarrow$»), **не** (*отрицание*). Конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию относят к **бинарным** операциям, так как в них используются два операнда, отрицание — **унарная** операция, для нее нужен один операнд.

Два составных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они принимают одинаковые значения истинности при любом наборе значений составных частей. Составное высказывание, принимающее истинные значения при любых значениях своих компонент, называется **тавтологией**. Высказывание (**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P) называется **противоположным** или **контрапозитивным** к высказыванию $P \Rightarrow Q$. Запись $P \Rightarrow Q$ читается следующим образом: «P влечет Q», или «из P следует Q», или «Q необходимо для P», или «P достаточно для Q».

Для обоснования логической эквивалентности высказываний используют **таблицу истинности**, в которой перечислены истинностные значения логических выражений для всех возможных наборов истинностных

[1] Числами в квадратных скобках обозначены ссылки на литературу из списка, помещенного в конце книги.

значений компонент (табл. 1.1). Эквивалентность двух высказываний можно установить посредством сравнения их таблиц истинности. У логически эквивалентных высказываний они совпадают.

Таблица 1.1

Таблица истинности

P	Q	**не** P	P **и** Q	P **или** Q	$P \Rightarrow Q$
И	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	Л	И

Если высказывания A и B эквивалентны, то пишут $A \Leftrightarrow B$. Последнее высказывание может быть записано через операции конъюнкции и импликации как $(A \Rightarrow B)$ **и** $(B \Rightarrow A)$.

Основные законы алгебры логики перечислены в табл. 1.2. Справедливость перечисленных законов легко доказать построением соответствующих таблиц истинности. Некоторые законы алгебры логики имеют непосредственные аналоги в алгебре вещественных чисел, к ним относятся законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Однако есть и такие законы, как, например, законы де Моргана[1], которые таких аналогов не имеют.

Утверждения о свойствах переменной x называют **предикатами** и обозначают: $P(x)$, $Q(x)$, ... **Областью истинности** предиката называется совокупность всех x, при которых данный предикат становится истинным высказыванием. Свойства предикатов изучает **логика предикатов**.

Для построения сложных логических выражений используются кванторы: $\forall$ (**для всех**) — квантор всеобщности и $\exists$ (**существует**) — квантор существования. **Квантор** — это логическая операция, которая по предикату $P(x)$ строит высказывание, характеризующее область истинности $P(x)$ [10, 48, 65].

Логическое выражение $\forall x\ (P(x))$ (читается «для всех x верно $P(x)$») означает, что для всех возможных значений x высказывание $P(x)$ принимает истинное значение. Выражение $\exists x\ (P(x))$ (читается «существует x такое, что верно $P(x)$») означает, что для некоторого значения x

[1] Августин де Морган (Augustus de Morgan) (1806–1871) — шотландский математик и логик.

Таблица 1.2

Законы алгебры логики

Законы идемпотентности

A **или** $A \Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** $A \Leftrightarrow A$

Свойства констант «И» и «Л»

A **или** Л $\Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** И $\Leftrightarrow A$

A **или** И $\Leftrightarrow$ И $\qquad$ A **и** Л $\Leftrightarrow$ Л

Свойства дополнения

A **или** (**не** A) $\Leftrightarrow$ И $\qquad$ A **и** (**не** A) $\Leftrightarrow$ Л

не (**не** A) $\Leftrightarrow A$

Законы коммутативности

A **или** $B \Leftrightarrow B$ **или** A $\qquad$ A **и** $B \Leftrightarrow B$ **и** A

Законы ассоциативности

A **или** (B **или** C) $\Leftrightarrow$ (A **или** B) **или** C

A **и** (B **и** C) $\Leftrightarrow$ (A **и** B) **и** C

Законы дистрибутивности

A **или** (B **и** C) $\Leftrightarrow$ (A **или** B) **и** (A **или** C)

A **и** (B **или** C) $\Leftrightarrow$ (A **и** B) **или** (A **и** C)

Законы поглощения

A **или** (A **и** B) $\Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** (A **или** B) $\Leftrightarrow A$

Законы де Моргана

не (A **или** B) $\Leftrightarrow$ (**не** A) **и** (**не** B)

не (A **и** B) $\Leftrightarrow$ (**не** A) **или** (**не** B)

$P(x)$ принимает истинное значение. Скобки после $\forall x$ и $\exists x$ ограничивают область действия квантора. Часто скобки, определяющие область действия, опускают.

Для отрицаний логических выражений с кванторами известны следующие логические эквивалентности:

$$\textbf{не}\, \forall x\ (P(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists x\ (\textbf{не}\, P(x));$$

$$\textbf{не}\, \exists x\ (P(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x\ (\textbf{не}\, P(x)).$$

Примечание. Названия логических операций происходят от латинских слов *conjungere* — объединять, *disjungere* — разъединять, *implicāre* — тесно связывать, *aequālis* — равный, *contrāpositum* — противопоставление. Термины «предикат» и «квантор» восходят к лат. *praedicātio* — высказывание, утверждение и *quantum* — сколько. Названия свойств бинарных операций происходят от лат. *commūtāre* — обменивать, *associāre* — соединять, *distributere* — распределять [22].

Существует несколько основных методов доказательства истинности высказывания вида $P \Rightarrow Q$ [71]:

1) *прямое рассуждение:* предполагается истинность P и выводится истинность Q;

2) *обратное рассуждение:* прямым рассуждением доказывается истинность высказывания $(\textbf{не}\, Q) \Rightarrow (\textbf{не}\, P)$ как логически эквивалентного $P \Rightarrow Q$;

3) метод *«от противного»:* предполагается истинность P и ложность Q и на основе аргументированных рассуждений получается противоречие.

Мощным способом доказательства истинности утверждений относительно всех натуральных чисел (к которым относятся $1, 2, 3, \ldots$) является принцип математической индукции [4, 37, 59] (от латинского *inductio* — выведение).

Принцип математической индукции. *Пусть $P(n)$ — предикат, определенный для всех натуральных чисел n, и пусть выполняются следующие условия:*

1) $P(1)$ *истинно;*

2) $\forall k \geqslant 1$ *импликация* $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ *верна.*

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном n.

Высказывание *1* обычно называют **базой индукции**, высказывание *2* — **шагом индукции**.

Для доказательства тождеств методом математической индукции поступают следующим образом. Пусть предикат $P(k)$ принимает истинное значение, когда рассматриваемое тождество верно для некоторого натурального числа k. Тогда доказываются два утверждения:

1) база индукции, т. е. $P(1)$;
2) шаг индукции, т. е. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ для произвольного $k \geqslant 1$.

Согласно методу математической индукции, делается вывод о верности рассматриваемого тождества для всех натуральных значений n.

Рассмотрим примеры применения метода математической индукции для доказательства тождеств и неравенств.

Пример 1.1. Докажем, что для всех натуральных n выполняется равенство

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Доказательство.

Обозначим предикат «$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$» через $P(n)$.

База индукции

Рассмотрим случай $n = 1$. Равенство принимает вид $1^2 = \dfrac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3}$, что является истинным утверждением.

Шаг индукции

Предположим, что $P(k)$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots$ принимает истинное значение, т. е. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \dfrac{k(4k^2-1)}{3}$. Докажем, что $P(k+1)$ — истинно.

Запишем предикат $P(k+1)$ в виде:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

Воспользуемся индуктивным предположением и перепишем сумму $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2$ как дробь $\dfrac{1}{3}k(4k^2-1)$:

$$\underbrace{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2}_{k(4k^2-1)/3} + (2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1);$$

$$\frac{1}{3}k(4k^2-1) + (2k+1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{1}{3}(4k^3 - k + 3(4k^2 + 4k + 1)) = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2 - 1);$$

$$\frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2 - 1) = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2 - 1).$$

Получили верное равенство. Значит, при любом $k = 1, 2, \ldots$ импликация $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ справедлива, и методом математической индукции доказано, что $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$ для всех натуральных n. □

В следующем примере в качестве предиката $P(n)$ выступает неравенство.

Пример 1.2. Докажем **неравенство Бернулли**[1] [36]:

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na \ \text{ для } \ n = 1, 2, \ldots \ \text{ и } \ a > -1.$$

Доказательство.

Обозначим предикат «$(1+a)^n \geqslant 1 + na$ для $a > -1$» через $P(n)$.

База индукции

Для $n = 1$ неравенство принимает вид $(1+a)^1 \geqslant 1+a$, и это истинное утверждение.

Шаг индукции

Пусть $P(k)$ — истинно, т. е. $(1+a)^k \geqslant 1 + ka$ для некоторого натурального k и $a > -1$. Проверим истинность утверждения $P(k+1)$: $(1+a)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)a$.

Для этого умножим обе части неравенства, составляющего индуктивное предположение, на положительное число $1 + a$:

$$(1+a)^k(1+a) \geqslant (1+ka)(1+a).$$

Раскроем скобки в правой части полученного неравенства:

$$(1+a)^k(1+a) \geqslant 1 + (k+1)a + ka^2.$$

Принимая во внимание, что $ka^2 \geqslant 0$, получаем:

$$(1+a)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)a,$$

что составляет утверждение $P(k+1)$. Значит, по принципу математической индукции неравенство Бернулли выполняется для всех натуральных n. □

[1] Бернулли (Jacob Bernoulli) (1654–1705) — швейцарский математик.

Задачи к главе «Основы математической логики»

1.1. Установите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

1) Язык Pascal относится к высокоуровневым языкам программирования.

2) Пейте морковный сок!

3) Есть ли жизнь на Марсе?

4) Первые компьютеры появились в XVIII веке.

1.2. Установите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

1) Любое квадратное уравнение имеет вещественные корни.

2) Треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$.

3) Неверно, что на Луне нет воды.

4) Да здравствуют Олимпийские игры!

∗1.3. На листе бумаги записано предложение: «Это предложение ложно». Является ли оно высказыванием?

1.4. Покажите, что выполняются следующие логические эквивалентности, известные как законы де Моргана (табл. 1.2):

1) $\textbf{не}\ (A\ \textbf{и}\ B)\ \Leftrightarrow\ (\textbf{не}\ A)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\ B)$;

2) $\textbf{не}\ (A\ \textbf{или}\ B)\ \Leftrightarrow\ (\textbf{не}\ A)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ B)$.

∗1.5. Обобщите логические эквивалентности из упражнения **1.4** на случай произвольного числа простых высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n = 2, 3, \ldots$

1.6. Покажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A\ \textbf{и}\ B) \Rightarrow C$.

1.7. Покажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ логически эквивалентно высказыванию $(\textbf{не}\ C) \Rightarrow ((\textbf{не}\ A)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\ B))$.

1.8. Покажите, что высказывание $A\ \textbf{или}\ (B\ \textbf{и}\ C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A\ \textbf{или}\ B)\ \textbf{и}\ (A\ \textbf{или}\ C)$.

1.9. Покажите, что высказывание A **и** $(B$ **или** $C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A$ **и** $B)$ **или** $(A$ **и** $C)$.

1.10. Докажите, что высказывание

$$((A \textbf{ или } B) \textbf{ и } (\textbf{не } (A \textbf{ и } B))) \Leftrightarrow ((A \textbf{ и } (\textbf{не } B)) \textbf{ или } ((\textbf{не } A) \textbf{ и } B))$$

является тавтологией.

1.11. Является ли высказывание $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A$ **и** $B) \Rightarrow C)$ тавтологией?

1.12. Являются ли высказывания

1) $(A$ **и** $(B$ **или** $C)) \Rightarrow (A$ **или** $(B$ **и** $C))$,

2) $(A$ **и** $(B \Rightarrow C))$ **и** $(B$ **или** $(B \Rightarrow C))$

тавтологиями?

1.13. Являются ли высказывания

1) $(A \Rightarrow (B$ **или** $C)) \Rightarrow (($**не** $B) \Rightarrow A)$,

2) $((A$ **и** $B) \Rightarrow C) \Rightarrow (($**не** $C) \Rightarrow A)$

тавтологиями?

1.14. Обозначим через A высказывание: «я голоден», через B — «сейчас три часа», а через C — «пора обедать». Запишите следующие высказывания как составные высказывания, включающие A, B и C:

1) Если сейчас три часа или я голоден, то пора обедать.

2) Если не пора обедать, то я не голоден.

3) Если я голоден, то пора обедать. Но я не голоден. Значит, или сейчас не три часа, или не пора обедать.

1.15. Обозначим через A высказывание: «светит солнце», через B — «на улице жарко», а через C — «идет снег». Запишите следующие высказывания как составные высказывания, включающие A, B и C:

1) Если идет снег, то, если светит солнце, на улице не жарко.

2) Если светит солнце, то на улице либо жарко, либо идет снег (но не одновременно).

1.16. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если гвардейцы кардинала поблизости, то д'Артаньян готов к бою».

1.17. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если Арамис станет епископом и Портос получит баронский титул, то д'Артаньяну вручат маршальский жезл».

1.18. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если Атос перехватит письмо и Портос уйдет от погони, то Арамис раскроет замысел кардинала».

1.19. Некоторые скобки в составных высказываниях можно опускать, если договориться о порядке действия логических операций согласно их силе связывания. Сила связывания операндов логическими операциями определяется в соответствии с приведенной схемой [61]:

не
и
или
$\Rightarrow$
$\Leftrightarrow$

Наибольшей силой связывания обладает унарная операция отрицания, затем следуют бинарные операции в таком порядке: конъюнкция, дизъюнкция, импликация и операция эквивалентности.

Пусть A, B, C, D — простые высказывания. Определите, являются ли логически эквивалентными высказывания P_1 и P_2:

1) $P_1 = A\,\textbf{или}\,B\,\textbf{и}\,C\,\textbf{или}\,D,\ \ P_2 = (A\,\textbf{или}\,B)\,\textbf{и}\,(C\,\textbf{или}\,D)$;

2) $P_1 = A \Rightarrow B\ \textbf{или}\ C,\ \ P_2 = A \Rightarrow (B\ \textbf{или}\ C)$.

1.20. Проверьте составлением таблиц истинности, являются ли эквивалентными следующие выказывания:

1) $X = A\ \textbf{или}\ (B \Rightarrow C),\ \ Y = (A\,\textbf{или}\,B) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,C)$;

2) $X = A \Rightarrow (\textbf{не}\ (B\ \textbf{и}\ C)),\ \ Y = \textbf{не}\ ((A \Rightarrow B)\ \textbf{и}\ (A \Rightarrow C))$;

3) $X = A \Rightarrow ((B \Rightarrow C)\ \textbf{и}\ (C \Rightarrow B))$,
$Y = ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))\ \textbf{и}\ ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$;

4) $X = A\ \textbf{или}\ ((B \Rightarrow C)\ \textbf{и}\ (C \Rightarrow B))$,
$Y = ((A\,\textbf{или}\,B) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,C))\ \textbf{и}\ ((A\,\textbf{или}\,C) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,B))$.

1.21. Установите, какие из следующих высказываний являются тождественно ложными:

1) $A \Rightarrow (A$ **или** $B)$;
2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow$ (**не** $B \Rightarrow$ **не** A);
3) $(A$ **и** $B)$ **и** (**не** A **или не** B);
4) A **и** (($A \Rightarrow$ **не** A) **и** (**не** $A \Rightarrow A$)).

1.22. Друзья-мушкетеры заметили в дворцовом парке подозрительного человека в маске. Д'Артаньян считает, что это был кардинал. Портос утверждает, что неизвестный либо кардинал, либо миледи. Арамис доказывает, что если Портос не ошибается, то д'Артаньян прав. Атос уверен, что Портос и Арамис не могут ошибаться.

Дальнейшее расследование показало правильность выводов Атоса. Кто скрывался под маской?

1.23. Капитан королевских мушкетеров де Тревиль получил три письма от своих подчиненных.

В первом сообщалось, что если Атос сломал в бою шпагу, то Портос и Арамис сломали свои.

Второе гласило, что Атос и Арамис либо оба сломали свои шпаги, либо оба сохранили их в целости.

Наконец, в третьем сообщалось: чтобы Арамис сломал шпагу, необходимо, чтобы Портос сломал свою.

Де Тревилю известно также, что из трех писем, отправленных мушкетерами, одно было перехвачено и содержит неверные сведения. Кто из мушкетеров сломал шпагу?

1.24. В ограблении ювелирного магазина подозреваются трое: Александров, Быков и Семенов. Предварительное расследование привело к следующим выводам:

1) если к преступлению причастен Семенов, то причастен и Быков;

2) если виновен Александров, то виновен и Быков.

Первый вывод предварительного расследования подтвердился, второй оказался неверным. Кто совершил ограбление?

***1.25.** Технологический процесс предусматривает следующую схему работы четырех станков S_1–S_4. Если работает первый станок, то работают второй и третий. Третий станок работает тогда и только тогда, когда работает четвертый. Кроме того, если работает второй, то четвертый должен находиться в остановленном состоянии. Определите, какие станки работают в данный момент, если известно, что сейчас работает либо первый, либо второй (но не одновременно).

∗1.26. Технологический процесс предусматривает следующую схему работы четырех станков S_1–S_4. Если работает первый станок, то работает второй. Второй станок работает тогда и только тогда, когда работает третий, и если работает четвертый, то третий должен находиться в остановленном состоянии. Определите, какие станки работают в данный момент, если известно, что сейчас работает либо первый, либо второй (но не одновременно).

1.27. Авиасообщение на некоторой территории обеспечивается работой четырех аэропортов: двух основных (A и B) и двух резервных (A_1 для A и B_1 для B). Резервный аэропорт работает тогда и только тогда, когда не работает соответствующий основной. Необходимым условием приема самолетов аэропортом B_1 является работа аэропорта A_1. Пилоты воздушных судов получили указание, что аэропорт B из-за погодных условий не может принимать рейсы. Установите, какие из аэропортов работают.

1.28. Для выполнения важного поручения королевы мушкетеры королевской роты отправляются в Англию. Известно, что поедут Атос или Арамис (возможно, вместе), и Арамис или Портос (также, возможно, вместе). Если в путешествии примет участие Портос, то поедет Арамис, и если поедет Атос, то Арамис останется в Париже.

Кто из друзей-мушкетеров отправится выполнять поручение королевы?

1.29. Для выполнения важного поручения королевы мушкетеры королевской роты отправляются в Англию. Известно, что поедет либо Атос, либо Арамис (причем только один из них). Если Портос не примет участие в путешествии, то Арамис останется в Париже. Кроме того, если поедет Атос, то поедет Арамис.

Кто из друзей-мушкетеров отправится выполнять поручение королевы?

∗1.30. В оздоровительном лагере отдыхают четверо студентов: Алиса, Богдан, Валерия и Георгий. Некоторые из отдыхающих отправились на экскурсию, другие загорают на пляже. Либо Богдан, либо Валерия отправились на экскурсию (возможно, записались и Богдан, и Валерия). Если Валерия на пляже и Георгий на пляже, то Алиса тоже отдыхает на пляже. Неверно, что если Алиса на пляже, то Валерия или Георгий на экскурсии. Кто из студентов отправился на экскурсию, а кто пошел на пляж?

∗1.31. В оздоровительном лагере отдыхают четверо студентов: Алиса, Богдан, Валерия и Георгий. Некоторые из отдыхающих играют на спортивной площадке, другие готовятся к концерту самодеятельности. Известно, что либо Алиса, либо Богдан играют на спортплощадке (возможно, в одной команде). Если Богдан готовится к концерту и Валерия готовится к концерту, то Георгий тоже готовится к концерту. Кроме того, неверно, что если Георгий готовится к концерту, Богдан или Валерия — на спортплощадке. Кто из студентов играет на спортплощадке?

1.32. Рассмотрим еще две элементарные логические операции [4, 61]. **Штрих Шеффера**[1] двух высказываний A и B определяется как высказывание $A \mid B$, которое ложно тогда, когда оба высказывания истинны, и истинно в остальных случаях:

$$A \mid B = (\textbf{не}\, A)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\, B).$$

Стрелка Пирса[2] двух высказываний A и B определяется как высказывание $A \downarrow B$, которое истинно тогда, когда оба высказывания ложны, и ложно в остальных случаях:

$$A \downarrow B = (\textbf{не}\, A)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\, B).$$

Постройте таблицу истинности для высказываний $A \mid B$ и $A \downarrow B$.

1.33. Выразите основные логические операции (отрицание, дизъюнкцию, конъюнкцию, импликацию) через:

1) штрих Шеффера;

2) стрелку Пирса.

∗1.34. Выразите:

1) операцию «стрелка Пирса» через операцию «штрих Шеффера»;

2) операцию «штрих Шеффера» через операцию «стрелка Пирса».

[1] Шеффер (Henry Maurice Sheffer) (1882–1964) — американский логик.

[2] Пирс (Charles Sanders Peirce) (1839–1914) — американский логик.

1.35. Какие из следующих предложений являются предикатами:

1) произвольное четное число s можно представить в виде суммы двух нечетных чисел;
2) рациональное число q не больше $-\dfrac{7}{8}$;
3) треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$;
4) переменные x и y принимают одинаковые значения?

1.36. Запишите отрицание предиката P, если

1) $P(n) = \{$натуральное число n является четным$\}$;
2) $P(x, y) = \{x < y\}$.

1.37. Представьте отрицание высказывания T таким образом, чтобы операции отрицания относились к предикатам P и Q:

1) $T = \forall x\,(\exists y\,(P(x, y))$;
2) $T = \exists x\,(\exists y\,(P(x, y)) \Rightarrow Q(x, y))$.

1.38. Пусть x и y — вещественные числа. Определите истинностное значение высказываний

1) $\forall x\,(\exists y\,(x > y))$;
2) $\forall x\,(x \neq 0 \Rightarrow \exists y\,(xy = 1))$.

1.39. Пусть x и y — вещественные числа. Определите истинностное значение высказываний

1) $\exists x\,(\forall y\,(xy = y))$;
2) $\exists x\,(\forall y\,(x + y = 1))$.

1.40. Как известно из курса математического анализа [27, 36, 68], число a является пределом числовой последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для всех натуральных чисел n, больших или равных n_0, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

С помощью кванторов приведенное утверждение записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n \in \mathbb{N}\; (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Запишите с помощью кванторов утверждение: «предел числовой последовательности $\{a_n\}$ не равен a».

1.41. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$.

Запишите с помощью кванторов утверждение: «предел функции $f(x)$ в точке x_0 не равен A».

1.42. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Запишите с помощью кванторов утверждение: «функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0».

***1.43.** Запишите с помощью кванторов утверждение: «существует единственное значение переменной x, для которого предикат $P(x)$ принимает истинное значение».

1.44. Докажите методом математической индукции высказывание:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ для всех натуральных чисел n.

1.45. Докажите методом математической индукции высказывание:

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

для всех натуральных чисел n.

1.46. Докажите методом математической индукции высказывания:

1) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ для всех натуральных чисел n;

2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ для всех натуральных чисел n.

1.47. Докажите методом математической индукции, что сумма кубов первых n натуральных чисел равна квадрату их суммы:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.48. Докажите формулу для суммы кубов n первых нечетных натуральных чисел

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.49. Члены **арифметической прогрессии** определяются как $a_n = a_1 + (n-1)d$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, где a_1, d — const. Докажите методом математической индукции, что сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии определяется формулой $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$.

1.50. Члены **геометрической прогрессии** определяются как $b_n = b_1 q^{n-1}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, где b_1, q — const, $q \neq 1$. Докажите методом математической индукции, что сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

1.51. Докажите методом математической индукции, что $n^2 - n$ четно для всех натуральных n.

1.52. Докажите методом математической индукции, что для всех натуральных чисел n

1) $4n^3 + 14n$ кратно 3;
2) $n^5 - n - 10$ кратно 5;
3) $6^{2n-1} - 6$ кратно 7;
4) $n(n-1)(2n-1)$ кратно 6.

1.53. Докажите методом математической индукции, что для всех натуральных чисел a и n число $a^n - 1$ кратно $a - 1$.

1.54. Докажите методом математической индукции, что следующие числа делятся на 10 при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$

1) $4^n + 4(-1)^n$;

2) $3 \cdot 4^n - 8(-1)^n$.

1.55. Докажите, что число $\dfrac{1}{10}(79 \cdot 4^n - 4(-1)^n)$ целое при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$

1.56. Докажите, что число $\dfrac{79}{30} \cdot 4^n + \dfrac{(-1)^n}{5} - \dfrac{1}{3}$ целое при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$

1.57. Докажите методом математической индукции, что для всех натуральных значений n

1) $7^{n+1} - 2^{n+1}$ кратно 5;

2) $13^{n+1} + (-1)^n 12^{n+1}$ кратно 25;

3) $11 + (-1)^n(2n+5)$ кратно 4;

4) $10 - 2^{2n} - 6n$ кратно 18.

1.58. Докажите, что следующие выражения принимают целые значения для всех натуральных n:

1) $\dfrac{1}{10}(2 \cdot 7^n - 7 \cdot 2^n)$;

2) $\dfrac{1}{60}(7 \cdot 4^n - 42(-1)^n - 10)$;

3) $\dfrac{1}{36}(9 - (-3)^n(8n - 11))$;

4) $\dfrac{(-1)^n(2n-3)+3}{4}$.

1.59. Докажите, что следующие выражения принимают целые значения для всех натуральных n:

1) $\dfrac{1}{15}(13 \cdot 5^n - 5 \cdot 2^{n+1})$;

2) $\dfrac{1}{12}(11 \cdot 5^n - 2^{n+3} - 3)$;

3) $\dfrac{5}{84}(47 \cdot 7^n - 7 \cdot 3^{n+2} + 28)$;

4) $\dfrac{7}{60}(23 \cdot 2^{2n} + 12(-1)^n - 20)$.

1.60. Докажите тождество

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

1.61. Докажите тождество

$$\frac{1}{4 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 14} + \ldots + \frac{1}{(5n-1)(5n+4)} = \frac{n}{4(5n+4)}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

∗**1.62.** Предложите обобщение тождеств, сформулированных в упражнениях **1.60** и **1.61**.

1.63. Сформулируйте принцип математической индукции с помощью кванторов.

1.64. Прямым рассуждением докажите истинность высказывания:

$$n \text{ и } m \text{ — \textit{четные числа}} \Rightarrow n \cdot m \text{ — \textit{число четное.}}$$

1.65. Докажите методом обратного рассуждения:

$$n^2 \text{ — \textit{нечетное число}} \Rightarrow n \text{ — \textit{число нечетное.}}$$

1.66. Методом «от противного» докажите:

$$n \cdot m \text{ — \textit{нечетное число}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{\textit{оба сомножителя являются нечетными числами.}}$$

1.67. Докажите, что если квадрат некоторого целого числа p делится на 17, то и само число p делится на 17.

1.68. **Иррациональное число** t не может быть представлено в виде дроби с целыми числителем и знаменателем, т. е. не существует таких целых p и q, что $t = \dfrac{p}{q}$ [27, 36, 68].

Методом «от противного» докажите, что $\sqrt{17}$ является иррациональным числом.

1.69. Докажите иррациональность числа $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

1.70. Докажите иррациональность следующих чисел:

1) $\log_2 5$;

2) $\log_5 16$.

1.71. Пусть $a = \dfrac{3}{2} - 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{8} + 1$. На экзамене по курсу дискретной математики и математической логики студенту предложено выяснить, являются ли числа $a + b$ и $a \cdot b$ иррациональными. Студент рассуждает следующим образом: «Число a иррационально, число b также иррационально. Следовательно, их сумма $a + b$ и произведение $a \cdot b$ являются иррациональными числами».

Объясните, в чем ошибка студента.

1.72. **Простым числом** называется такое целое число $p > 1$, которое имеет только два делителя: единицу и само число p. Целое число $s > 1$, не являющееся простым, называется **составным** [4, 12].

1) Выпишите первые десять простых чисел.

2) Методом «от противного» докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

1.73. Запишите отрицание предиката

$$P(n) = \{\text{натуральное число } n \text{ является простым}\}.$$

1.74. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $8n + 7$, $n = 1, 2, \ldots$

1.75. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $10n + 9$, $n = 1, 2, \ldots$

1.76. **Факториалом** целого положительного числа n называется произведение всех натуральных чисел до n включительно [21, 30]:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

(по определению полагают $0! = 1$ и $1! = 1$). Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

1.77. **Гармоническое число** H_n определяется как сумма обратных величин первых n последовательных натуральных чисел [20, 30]:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Методом математической индукции докажите следующие тождества с гармоническими числами для всех натуральных значений переменной n:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} iH_i = \dfrac{n(n+1)}{4}(2H_{n+1} - 1)$.

∗1.78. Докажите тождества, приведенные в предыдущем упражнении, не привлекая метод математической индукции.

1.79. Докажите следующие неравенства для гармонических чисел [30]:

$$1 + \frac{n}{2} \leqslant H_{2^n} \leqslant 1 + n \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots$$

1.80. Определите все значения n, при которых гармоническое число H_n является целым.

1.81. Последовательность Фибоначчи[1]

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots$$

определяется рекуррентным соотношением: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ с начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$ [16, 21]. (Подробнее о рекуррентных соотношениях см. главу «Рекуррентные соотношения» на стр. 307.) Используя метод математической индукции, докажите следующие свойства чисел Фибоначчи для всех натуральных n:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$;

4) F_{3n} — четны, а F_{3n+1} и F_{3n+2} — нечетны.

1.82. Докажите справедливость соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ для всех натуральных чисел n.

1.83. Докажите, что для всех натуральных n выполняются тождества

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} (n - i + 1)F_i = F_{n+4} - n - 3$.

1.84. Вычислите сумму $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + (-1)^{n+1} F_n$.

[1] Под именем Фибоначчи известен средневековый математик Пизано (Leonardo Pisano) (ок. 1170 — ок. 1250).

1.85. **Числа Люка́**[1] определяются как $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ и $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ для целых чисел $n \geqslant 2$ [21]. Выпишите первые десять чисел Люка.

1.86. Докажите формулу для суммы чисел Люка:

$$\sum_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1, \quad n \geqslant 1.$$

1.87. Часто бывает удобнее воспользоваться эквивалентной формой принципа математической индукции [4, 70].

Вторая форма принципа математической индукции (принцип полной индукции). *Пусть $P(n)$ — предикат, определенный для всех натуральных чисел n, и пусть выполняются следующие условия:*

1) $P(1)$ истинно;

2) для произвольного k из истинности $P(i)$ для всех $i \leqslant k$ следует истинность $P(k+1)$.

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном n.

Принцип полной индукции используется в том случае, когда для доказательства предиката $P(k+1)$ требуется применить не только $P(k)$, но и некоторые предыдущие предикаты [61].

Сформулируйте принцип полной индукции с помощью кванторов.

***1.88.** Докажите эквивалентность первой и второй форм принципа математической индукции.

1.89. Задано вещественное число x такое, что $x + \dfrac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ тоже целое для всех натуральных n [74].

1.90. Докажите формулу сложения членов ряда Фибоначчи

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

для всех натуральных n и m, $n > 1$.

1.91. Докажите, что выражение $F_n^2 + F_{n+1}^2$ тоже является числом Фибоначчи.

[1] Люка (François Édouard Anatole Lucas) (1842–1891) — французский математик.

∗1.92. Докажите, что явное выражение для чисел Фибоначчи F_n, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, дается формулой [21]

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

известной как **формула Бине́**[1].

1.93. Докажите, что для всех целых положительных $n = 2, 3, \ldots$ выполняется равенство $\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}$, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение.

1.94. Докажите, что выполняется соотношение $F_{2n-1} F_{2n+1} - F_{2n}^2 = 1$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$

1.95. Докажите, что выполняется соотношение $F_{2n+1} F_{2n+2} - F_{2n} F_{2n+3} = 1$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$

∗1.96. Докажите тождество $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{F_{2n}} = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{F_{2n+2}}$, $n \geqslant 1$.

1.97. Докажите, что числа Люка могут быть выражены через числа Фибоначчи

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad n \geqslant 2.$$

1.98. Представив рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи в виде $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$, можно обобщить F_n на все целые значения n. Найдите выражение для чисел Фибоначчи с отрицательными индексами.

1.99. Представив рекуррентное соотношение для чисел Люка в виде $L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$, можно обобщить L_n на все целые значения n. Найдите выражение для чисел Люка с отрицательными индексами.

∗1.100. Докажите, что явное выражение для чисел Люка L_n, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, дается формулой

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

[1] Бине (Jacques Philippe Marie Binet) (1786–1856) — французский математик и механик.

1.101. Докажите следующие тождества для $n = 1, 2, 3, \ldots$:

1) $L_{4n} = L_{2n}^2 - 2$;

2) $L_{4n+2} = L_{2n+1}^2 + 2$.

1.102. Докажите следующие тождества, верные для $n = 1, 2, 3, \ldots$:

1) $L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n$;

2) $L_n^3 = L_{3n} + 3(-1)^n L_n$.

1.103. Докажите следующие тождества, верные для $n = 1, 2, 3, \ldots$:

1) $L_n^4 = L_{4n} + 4(-1)^n L_{2n} + 6$;

2) $L_n^5 = L_{5n} + 5(-1)^n L_{3n} + 10L_n$.

1.104. Упростите выражение $L_{n-1}L_m + L_n L_{m+1}$ для натуральных значений n и m.

1.105. Докажите тождество для целых неотрицательных n и k, $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$L_{n-k}L_{n+k} = L_{2n} + (-1)^{n+k} L_{2k}.$$

1.106. Докажите тождества для целых i:

1) $L_{6i} = L_{2i}(L_{4i} - 1)$;

2) $L_{8i} = L_{2i}L_{6i} - L_{4i}$.

1.107. Докажите следующее соотношение, связывающее числа Фибоначчи и числа Люка:

$$F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k} = F_n L_k, \quad n, k = 1, 2, 3, \ldots, \ n > k.$$

1.108. Докажите тождества, устанавливающие связь между числами Фибоначчи и числами Люка:

1) $F_n^2 = \dfrac{L_n^2 - 4(-1)^n}{5}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

2) $F_{n-1}F_{n+1} = \dfrac{L_n^2 + (-1)^n}{5}$, $n = 2, 3, \ldots$

1.109. Докажите тождества для всех целых $n > 3$:

1) $F_{n-2}F_{n+2} = \dfrac{1}{5}(L_n^2 - 9(-1)^n)$;

2) $F_{n-3}F_{n+3} = \dfrac{1}{5}(L_n^2 + 16(-1)^n)$.

1.110. Обобщив тождества из упражнений **1.108** и **1.109**, выразите произведение чисел Фибоначчи $F_{n-k}F_{n+k}$ для целых неотрицательных n и k, причем $k \leqslant n-1$, через числа Люка.

1.111. Докажите тождество, верное для натуральных значений n:

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}.$$

1.112. Произвольное натуральное число N в десятичной системе счисления можно представить единственным образом в виде [4, 12, 15]

$$N = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где каждое из a_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, равно одному из чисел $0, 1, \ldots, 9$. Такое число записывают как $N = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$.

Докажите **признак делимости на** 3: для того чтобы число N делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.

1.113. Докажите **признак делимости на** 7: для того чтобы число N делилось на 7, необходимо и достаточно, чтобы сумма утроенного числа десятков и числа единиц его десятичной записи делилась на 7.

1.114. Докажите **признак делимости на** 9: для того чтобы число N делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

1.115. Докажите **признак делимости на** 11: для того чтобы число N делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммами цифр, стоящих в его десятичной записи на четных и нечетных местах, делилась на 11.

$*$**1.116.** **Основная теорема арифметики** утверждает, что каждое натуральное число, большее единицы, либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел [12, 50]. Такое представление единственно с точностью до расположения сомножителей.

Используя принцип математической индукции во второй форме, докажите основную теорему арифметики.

1.117. Докажите, что для произвольного числа n в натуральном ряду $1, 2, 3, \ldots$ найдутся n последовательных составных чисел.

1.118. Найдите десять последовательных составных чисел.

Ответы, указания, решения к главе «Основы математической логики»

1.1. *Решение.*

Как следует из определения, высказывание — это предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Предложение «язык Pascal относится к высокоуровневым языкам программирования» истинно, а «первые компьютеры появились в XVIII веке» — ложно. Вопросительные и восклицательные предложения не относят к высказываниям. В итоге получаем, что высказываниями являются только предложения из 1) и 4).

1.2. *Ответ:* высказываниями являются предложения 1) и 3).

1.3. *Ответ:* нет, поскольку из предположения об истинности или ложности рассматриваемого предложения следует противоречие.

1.4. *Доказательство.*

Составим таблицу истинности приведенных высказываний:

A	B	**не** (A **и** B)	(**не** A) **или** (**не** B)	**не** (A **или** B)	(**не** A) **и** (**не** B)
И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И	И

Столбцы, соответствующие правой и левой частям равенств, совпадают. Этим доказывается истинность логических эквивалентностей **не** (A **и** B) $\Leftrightarrow$ (**не** A) **или** (**не** B) и **не** (A **или** B) $\Leftrightarrow$ (**не** A) **и** (**не** B).

1.5. *Ответ:*

1) **не** (A_1 **и** A_2 **и** $\ldots$ **и** A_n) $\Leftrightarrow$ (**не** A_1) **или** (**не** A_2) **или** $\ldots$ **или** (**не** A_n);

2) **не** (A_1 **или** A_2 **или** $\ldots$ **или** A_n) $\Leftrightarrow$ (**не** A_1) **и** (**не** A_2) **и** $\ldots$ **и** (**не** A_n).

1.6. *Решение.*

Составим таблицу истинности приведенных высказываний:

A	B	C	A **и** B	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$(A$ **и** $B) \Rightarrow C$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	Л	Л	И	И
Л	Л	И	Л	И	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И	И

Два последних столбца совпадают, поэтому соответствующие выражения логически эквивалентны.

1.7. *Решение.*

Обозначим: $P_1 = A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, $P_2 = (\textbf{не}\, C) \Rightarrow ((\textbf{не}\, A)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\, B))$. Таблица истинности для высказываний P_1 и P_2 представлена ниже.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	(**не** A) **или** (**не** B)	P_1	P_2
И	И	И	И	Л	И	И
И	И	Л	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Из сравнения двух последних столбцов следует логическая эквивалентность P_1 и P_2.

1.8. *Решение.*

Задача решается составлением таблицы истинности для высказываний $P_1 = A$ **или** $(B$ **и** $C)$, $P_2 = (A$ **или** $B)$ **и** $(A$ **или** $C)$.

A	B	C	A **или** B	A **или** C	B **и** C	P_1	P_2
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

1.9. *Решение.*

Задача решается составлением таблицы истинности для высказываний $P_1 = A$ **и** $(B$ **или** $C)$, $P_2 = (A$ **и** $B)$ **или** $(A$ **и** $C)$.

A	B	C	A **и** B	A **и** C	B **или** C	P_1	P_2
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

1.10. *Доказательство.*

Введем следующие обозначения: $P_1 = (A$ **или** $B)$ **и** (**не** $(A$ **и** $B))$, $P_2 = (A$ **и** (**не** $B))$ **или** ((**не** $A)$ **и** $B)$. На всех возможных наборах значений истинности высказываний A и B высказывание $P_1 \Leftrightarrow P_2$ истинно, поэтому приведенное высказывание является тавтологией.

A	B	A **и не** B	**не** A **и** B	P_1	P_2	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	И	И	И
Л	Л	Л	Л	Л	Л	И

1.11. *Решение.*

Составим таблицу истинности для составного высказывания $P = (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A$ **и** $B) \Rightarrow C)$:

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$(A$ **и** $B)$	$(A$ **и** $B) \Rightarrow C$	P
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	Л	И	И
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	Л	И	И
Л	Л	Л	И	И	Л	И	И

Анализ таблицы показывает, что на всех возможных наборах значений истинности простых высказываний A, B и C высказывание P истинно. Следовательно, приведенное высказывание является тавтологией.

1.12. *Решение.*

1) Составим таблицу истинности для приведенного высказывания $P = (A$ **и** $(B$ **или** $C)) \Rightarrow (A$ **или** $(B$ **и** $C))$. Для всех наборов значений

высказываний A, B и C, входящих в состав P, P принимает истинное значение.

A	B	C	B **или** C	A **и** $(B$ **или** $C)$	B **и** C	A **или** $(B$ **и** $C)$	P
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	И	И
Л	И	И	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	И
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И

В силу этого высказывание P является тавтологией.

2) Пусть $P = (A$ **и** $(B \Rightarrow C))$ **и** $(B$ **или** $(A \Rightarrow C))$. Из анализа таблицы истинности для высказывания P следует, что для некоторых наборов значений высказываний A, B и C, входящих в состав P (например, для $A = B =$ И, $C =$ Л), P принимает ложное значение.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	A **и** $(B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	B **или** $(A \Rightarrow C)$	P
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л
Л	И	И	И	Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л
Л	Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	И	Л	И	И	Л

Следовательно, высказывание P не является тавтологией.

1.13. *Ответ:*

1) не является;
2) не является.

1.14. *Решение.*

Обратим внимание, что последовательность высказываний, записанных в виде отдельных предложений, с помощью логических операций должна быть записана в виде конъюнкции простых высказываний. Учитывая сказанное и используя основные логические операции, получаем следующий символьный вид составных высказываний:

1) $(B$ **или** $A) \Rightarrow C$;

2) (**не** $C) \Rightarrow$ (**не** $A)$;

3) $((A \Rightarrow C)$ **и** (**не** $A)) \Rightarrow (($**не** $B)$ **или** (**не** $C))$.

1.15. *Ответ:*

1) $C \Rightarrow (A \Rightarrow ($**не** $B))$;

2) $A \Rightarrow ((B$ **и** (**не** $C))$ **или** $(($**не** $B)$ **и** $C))$.

1.16. *Решение.*

Приведенное высказывание рассматриваем как составное. Обозначим высказывания, входящие в его состав, через

A = «гвардейцы кардинала поблизости»;
B = «д'Артаньян готов к бою».

Контрапозитивным по отношению к высказыванию $A \Rightarrow B$ по определению является **не** $B \Rightarrow$ **не** A. Следовательно, ответом на данное упражнение будет **не** $B \Rightarrow$ **не** A = «если д'Артаньян не готов к бою, то поблизости нет гвардейцев кардинала».

1.17. *Решение.*

Обозначим высказывания, входящие в состав приведенного составного высказывания, как

A = «Арамис станет епископом»;
B = «Портос получит баронский титул»;
C = «д'Артаньяну вручат маршальский жезл».

Контрапозитивным по отношению к высказыванию $(A$ **и** $B) \Rightarrow C$ является (**не** $C) \Rightarrow$ (**не** $(A$ **и** $B))$, которое логически эквивалентно следующему: (**не** $C) \Rightarrow (($**не** $A)$ **или** (**не** $B))$. В силу этого ответом на данное упражнение будет

$(\textbf{не}\, C) \Rightarrow ((\textbf{не}\, A)$ **или** $(\textbf{не}\, B))$ = «если д'Артаньяну не вручат маршальский жезл, то или Арамис не станет епископом, или Портос не получит баронский титул».

1.18. *Ответ:*

«Если Арамис не раскроет замысел кардинала, то либо Атос не перехватит письмо, либо Портос не уйдет от погони».

1.19. *Ответ:*

1) P_1 и P_2 не являются логически эквивалентными;

2) эквивалентные высказывания.

1.20. *Ответ:*

1) эквивалентные высказывания;

2) X и Y не являются логически эквивалентными;

3) эквивалентные высказывания;

4) эквивалентные высказывания.

1.21. *Ответ:*

Тождественно ложными являются высказывания пунктов 3) и 4).

1.22. *Решение.*

Введем обозначения:

C = «инкогнито — кардинал»;

M = «инкогнито — миледи».

Запишем высказывания каждого из мушкетеров с помощью логических операций:

1) д'Артаньян: C истинно, $C = \text{И}$;

2) Портос: $P = (C \ \textbf{или}\ M)\ \textbf{и}\ \textbf{не}\,(C\ \textbf{и}\ M)$.

Составлением таблицы истинности несложно показать, что высказывание Портоса логически эквивалентно

$$P = (C\ \textbf{и}\ \textbf{не}\, M)\ \textbf{или}\ (M\ \textbf{и}\ \textbf{не}\, C).$$

3) Арамис: $P \Rightarrow C$.

4) Атос: $P\ \textbf{и}\ (P \Rightarrow C)$.

Согласно условию, высказывание Атоса истинно, $P\,\textbf{и}\,(P \Rightarrow C) = \text{И}$. Конъюнкция двух высказываний истинна, если и только если каждое из высказываний принимает истинное значение, поэтому

$$\begin{cases} P = \text{И}; \\ P \Rightarrow C = \text{И}. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует И $\Rightarrow C =$ И, значит, высказывание C является истинным, и под маской скрывался кардинал.

1.23. *Ответ:* шпаги сломали Портос и Арамис.

1.24. *Решение.*

Введем обозначения:

A — «виновен Александров»;
B — «виновен Быков»;
C — «виновен Семенов».

Пусть $P = (C \Rightarrow B)$ **и не** $(A \Rightarrow B)$. Из условия задачи следует $P =$ И. Выпишем таблицу истинности для высказывания в левой части полученного равенства.

A	B	C	$C \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$	**не** $(A \Rightarrow B)$	P
И	И	И	И	И	Л	Л
И	И	Л	И	И	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	Л	Л

Составное высказывание $(C \Rightarrow B)$ **и не** $(A \Rightarrow B)$ принимает истинное значение только в одном случае, а именно когда высказывания B и C ложны, а высказывание A истинно. Отсюда следует вывод, что в ограблении виновен Александров.

1.25. *Решение.*

Первый способ

Пусть $S_i =$ И, если i-й станок работает, где $i = 1, 2, 3, 4$, и $S_i =$ Л в противном случае. Составим таблицу истинности для логических выражений, соответствующих условиям работы станков (табл. 1.3). Из условия задачи заключаем, что следующие составные высказывания имеют истинное значение:

$$P_1 = S_1 \Rightarrow (S_2 \,\textbf{и}\, S_3), \qquad P_2 = S_3 \Leftrightarrow S_4,$$
$$P_3 = S_2 \Rightarrow \textbf{не}\, S_4, \qquad P_4 = (S_1 \,\textbf{и не}\, S_2) \,\textbf{или}\, (\textbf{не}\, S_1 \,\textbf{и}\, S_2).$$

Таблица 1.3

К упр. ***1.25***

S_1	S_2	S_3	S_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P
И	И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
И	Л	И	И	Л	И	И	И	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	И	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	Л	Л	И	И	И	Л
Л	И	И	И	И	И	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И	Л	И	И	Л
Л	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л

Из анализа таблицы истинности следует, что

$$S_1 = S_3 = S_4 = \text{Л}, \quad S_2 = \text{И}.$$

Получаем, что в данный момент работает только второй станок.

Второй способ

Поскольку число строк в таблице истинности равно 2^n, где n — количество переменных в логическом выражении [4, 17], то с увеличением n размер таблицы истинности быстро возрастает, и работа с таблицей истинности становится затруднительной. В силу этого предпочтительным оказывается способ упрощения логических выражений с помощью эквивалентных преобразований.

Рассмотрим логическое выражение

$$P = P_1 \textbf{ и } P_2 \textbf{ и } P_3 \textbf{ и } P_4.$$

Согласно условию задачи, данное выражение принимает истинное значение. Упростим P, используя законы алгебры логики (табл. 1.2).

Так как изменение порядка выражений, связанных операцией конъюнкции, приводит к логически эквивалентной формуле (закон коммутативности), то представим выражение P в виде

$$P = P_1 \textbf{ и } P_2 \textbf{ и } P_3 \textbf{ и } P_4 = ((P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_2) \textbf{ и } P_3.$$

Теперь последовательно упрощаем полученное выражение:

$$\begin{aligned}
P_1 \textbf{ и } P_4 &= (S_1 \Rightarrow (S_2 \textbf{ и } S_3)) \textbf{ и } [(S_1 \textbf{ и не } S_2) \textbf{ или } (\textbf{ не } S_1 \textbf{ и } S_2)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ или } (S_2 \textbf{ и } S_3)) \textbf{ и } [(S_1 \textbf{ и не } S_2) \textbf{ или } (\textbf{ не } S_1 \textbf{ и } S_2)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [(\textbf{не } S_1 \textbf{ или } (S_2 \textbf{ и } S_3) \textbf{ и } (S_1 \textbf{ и не } S_2)] \textbf{ или} \\
&\qquad \textbf{или } [(\textbf{не } S_1 \textbf{ или } (S_2 \textbf{ и } S_3)) \textbf{ и } (\textbf{ не } S_1 \textbf{ и } S_2)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [(\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_1 \textbf{ и не } S_2) \textbf{ или } (S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и } S_1 \textbf{ и не } S_2)] \textbf{ или} \\
&\qquad \textbf{или } [(\textbf{не } S_1 \textbf{ и не } S_1 \textbf{ и } S_2) \textbf{ или } (S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и не } S_1 \textbf{ и } S_2)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\text{Л} \textbf{ или } \text{Л}) \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2) \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3) = \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2.
\end{aligned}$$

Далее вычисляем $(P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_3$:

$$\begin{aligned}
(P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_3 &= (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2) \textbf{ и } (S_2 \Rightarrow \textbf{не } S_4) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2) \textbf{ и } (\textbf{не } S_2 \textbf{ или не } S_4) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_2) \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4.
\end{aligned}$$

Проведем заключительное логическое умножение:

$$\begin{aligned}
P &= ((P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_3) \textbf{ и } P_2 = \\
&= (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4) \textbf{ и } [(S_3 \textbf{ и } S_4) \textbf{ или } (\textbf{не } S_3 \textbf{ и не } S_4)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и } S_4) \textbf{ или} \\
&\qquad \textbf{или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4 \textbf{ и не } S_3 \textbf{ и не } S_4) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \text{Л} \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4 \textbf{ и не } S_3 \textbf{ и не } S_4) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_3 \textbf{ и не } S_4.
\end{aligned}$$

Полученная эквивалентная форма

$$P = P_1 \textbf{ и } P_2 \textbf{ и } P_3 \textbf{ и } P_4 = \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_3 \textbf{ и не } S_4$$

позволяет легко установить значения логических выражений S_1–S_4:

$$S_1 = S_3 = S_4 = \text{Л}, \quad S_2 = \text{И}.$$

Следовательно, в данный момент работает только второй станок.

1.26. *Решение.*
Первый способ

Положим $S_i = \text{И}$, если i-й станок работает, где $i = 1, 2, 3, 4$, и $S_i = \text{Л}$ в противном случае. Ответ на вопрос задачи можно получить, построив таблицу истинности для логических выражений, соответствующих условиям работы станков (табл. 1.4). Из условия задачи заключаем, что следующие составные высказывания имеют истинное значение:

$$P_1 = S_1 \Rightarrow S_2, \qquad P_2 = S_2 \Leftrightarrow S_3,$$
$$P_3 = S_4 \Rightarrow \textbf{не}\, S_3, \qquad P_4 = (S_1\, \textbf{и}\, S_2)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\ \textbf{не}\, S_2).$$

Из анализа таблицы истинности следует, что

$$S_1 = S_4 = \text{Л}, \quad S_2 = S_3 = \text{И}.$$

Окончательно получаем, что в данный момент работают второй и третий станки.

Второй способ

Рассмотрим логическое выражение

$$P = P_1\, \textbf{и}\, P_2\, \textbf{и}\, P_3\, \textbf{и}\, P_4.$$

Согласно условию задачи, данное выражение принимает истинное значение. Попробуем упростить P.

Применяя закон коммутативности, представим выражение P в виде

$$P = P_1\, \textbf{и}\, P_2\, \textbf{и}\, P_3\, \textbf{и}\, P_4 = ((P_1\, \textbf{и}\, P_4)\, \textbf{и}\, P_2)\, \textbf{и}\, P_3.$$

Теперь последовательно упрощаем полученное выражение:

$$P_1\, \textbf{и}\, P_4 = (S_1 \Rightarrow S_2)\, \textbf{и}\ [(S_1\ \textbf{и}\ \textbf{не}\, S_2)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, S_2)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{не}\, S_1\ \textbf{или}\ S_2)\, \textbf{и}\ [(S_1\ \textbf{и}\ \textbf{не}\, S_2)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, S_2)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(\textbf{не}\, S_1\ \textbf{или}\ S_2)\, \textbf{и}\, (S_1\ \textbf{и}\ \textbf{не}\, S_2)]\ \textbf{или}\ [(\textbf{не}\, S_1\ \textbf{или}\ S_2)\, \textbf{и}\, (\textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, S_2)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(\textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, S_1\ \textbf{и}\ \textbf{не}\, S_2)\ \textbf{или}\ (S_2\, \textbf{и}\, S_1\ \textbf{и}\ \textbf{не}\, S_2)]\ \textbf{или}$$
$$\textbf{или}\ [(\textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, \textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, S_2)\ \textbf{или}\ (S_2\ \textbf{и}\ \textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, S_2)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\text{Л}\ \textbf{или}\ \text{Л})\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, S_2)\ \textbf{или}\ (S_2\, \textbf{и}\, \textbf{не}\, S_1) \Leftrightarrow \textbf{не}\, S_1\, \textbf{и}\, S_2.$$

Таблица 1.4

К упр. ***1.26***

S_1	S_2	S_3	S_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P
И	И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	И	И	Л	И	И	И	Л	Л
И	И	Л	И	И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л
И	Л	И	И	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И	И	Л
И	Л	Л	Л	Л	И	И	И	Л
Л	И	И	И	И	И	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	И	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л

Далее вычисляем $(P_1 \text{ **и** } P_4)$ **и** P_2:

$$(P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_2 = (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2) \textbf{ и } [S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ или } (\textbf{не } S_2 \textbf{ и } \textbf{не } S_3)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3) \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } \textbf{не } S_2 \textbf{ и } \textbf{не } S_3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3) \textbf{ или } \text{Л} \Leftrightarrow \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3.$$

Осталось провести последнее логическое умножение:

$$\begin{aligned} P = ((P_1 \text{ **и** } P_4) \text{ и } P_2) \text{ и } P_3 = (\text{не}\, S_1 \text{ и } S_2 \text{ и } S_3) \text{ и } (S_4 \Rightarrow \text{не}\, S_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\text{не}\, S_1 \text{ и } S_2 \text{ и } S_3) \text{ и } (\text{не}\, S_3 \text{ или не}\, S_4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\text{не}\, S_1 \text{ и } S_2 \text{ и } S_3 \text{ и не}\, S_3) \text{ или } (\text{не}\, S_1 \text{ и } S_2 \text{ и } S_3 \text{ и не}\, S_4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{Л} \text{ или } (\text{не}\, S_1 \text{ и } S_2 \text{ и } S_3 \text{ и не}\, S_4) \Leftrightarrow \text{не}\, S_1 \text{ и } S_2 \text{ и } S_3 \text{ и не}\, S_4. \end{aligned}$$

Конечно, можно выбрать и любой другой порядок логического умножения выражений P_1–P_4, если этим будет обеспечиваться удобство вычислений.

Полученная эквивалентная форма

$$P = P_1 \text{ и } P_2 \text{ и } P_3 \text{ и } P_4 = \text{не}\, S_1 \text{ и } S_2 \text{ и } S_3 \text{ и не}\, S_4$$

позволяет легко установить значения логических выражений S_1–S_4:

$$S_1 = S_4 = \text{Л}, \quad S_2 = S_3 = \text{И}.$$

Следовательно, в данный момент работают второй и третий станки.

1.27. *Решение.*

Задачу можно решать построением таблицы истинности или методом эквивалентных преобразований логических высказываний. Однако проще заметить, что, поскольку резервный аэропорт работает тогда и только тогда, когда не работает соответствующий основной, то легко сделать вывод: работает B_1, $B_1 = \text{И}$. Из оставшихся воздушных портов A и A_1 самолеты может принимать один и только один. Далее, работа A_1 необходима для B_1, поэтому $A_1 = \text{И}$. Таким образом, действующие аэропорты — A_1 и B_1.

1.28. *Решение.*

Введем логические переменные:

A — «поедет Атос»;

B — «поедет Портос»;

C — «поедет Арамис».

Из условия задачи заключаем, что (A **или** B) **и** (B **или** C) **и** ($B \Rightarrow C$) **и** ($A \Rightarrow$ **не** C) $= \text{И}$. Упростим выражение в левой части полученного равенства:

$$(A \textbf{ или } B) \textbf{ и } (B \textbf{ или } C) \textbf{ и } (B \Rightarrow C) \textbf{ и } (A \Rightarrow \textbf{не}\, C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \textbf{ или } B) \textbf{ и } (B \textbf{ или } C) \textbf{ и } (\textbf{не}\, B \textbf{ или } C) \textbf{ и } (\textbf{не}\, A \textbf{ или не}\, C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \textbf{ или } B) \textbf{ и } [(B \textbf{ и не}\, B) \textbf{ или } C)] \textbf{ и } (\textbf{не}\, A \textbf{ или не}\, C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \textbf{ или } B) \textbf{ и } C \textbf{ и } (\textbf{не}\, A \textbf{ или не}\, C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \textbf{ или } B) \textbf{ и } [(C \textbf{ и не}\, A) \textbf{ или } (C \textbf{ и не}\, C)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \textbf{ или } B) \textbf{ и } (\textbf{не}\, A \textbf{ и } C) \Leftrightarrow (A \textbf{ и } (\textbf{не}\, A \textbf{ и } C)) \textbf{ или } (\textbf{не}\, A \textbf{ и } B \textbf{ и } C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textbf{не}\, A \textbf{ и } B \textbf{ и } C.$$

Следовательно, в путешествие отправятся Портос и Арамис.

1.29. *Ответ:* Арамис и Портос.

1.30. *Решение.*

Поскольку каждый из отдыхающих находится либо на экскурсии, либо на пляже, то можно ввести в рассмотрение логические переменные A, $Б$, $В$ и $Г$, значение которых определяет занятие соответствующего студента. Обозначим $A =$ И, если Алиса на экскурсии, и $A =$ Л, если Алиса на пляже. По аналогичному правилу определим значения переменных $Б$, $В$, $Г$.

Согласно условию задачи, выражение

$$(Б \textbf{ или } В) \textbf{ и } ((\textbf{не } В \textbf{ и не } Г) \Rightarrow \textbf{не } A) \textbf{ и } (\textbf{не } (\textbf{не } A \Rightarrow (В \textbf{ или } Г)))$$

принимает истинное значение:

$$(Б \textbf{ или } В) \textbf{ и } ((\textbf{не } В \textbf{ и не } Г) \Rightarrow \textbf{не } A) \textbf{ и } (\textbf{не } (\textbf{не } A \Rightarrow (В \textbf{ или } Г))) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (Б \textbf{ или } В) \textbf{ и } (В \textbf{ или } Г \textbf{ или не } A) \textbf{ и } (\textbf{не } A \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((Б \textbf{ и не } A \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г) \textbf{ или } (В \textbf{ и не } A \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г)) \textbf{ и}$$
$$\textbf{и } (В \textbf{ или } Г \textbf{ или не } A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\textbf{не } A \textbf{ и } Б \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г) \textbf{ или } \text{Л}) \textbf{ и } (В \textbf{ или } Г \textbf{ или не } A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{не } A \textbf{ и } Б \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г) \textbf{ и } (\textbf{не } A \textbf{ или } В \textbf{ или } Г) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{не } A \textbf{ и } Б \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г \textbf{ и не } A) \textbf{ или}$$
$$\textbf{или } (\textbf{не } A \textbf{ и } Б \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г \textbf{ и } В) \textbf{ или}$$
$$\textbf{или } (\textbf{не } A \textbf{ и } Б \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г \textbf{ и } Г) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\textbf{не } A \textbf{ и } Б \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г) \textbf{ или } \text{Л} \textbf{ или } \text{Л} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textbf{ не } A \textbf{ и } Б \textbf{ и не } В \textbf{ и не } Г.$$

Поскольку $\textbf{не}\, A \textbf{ и } Б \textbf{ и не}\, В \textbf{ и не } Г =$ И, то получаем следующий результат: на экскурсию отправился Богдан, а Алиса, Валерия и Григорий — на пляж.

1.31. *Ответ:* Алиса.

1.32. *Ответ:*

A	B	$A \mid B$	$A \downarrow B$
И	И	Л	Л
И	Л	И	Л
Л	И	И	Л
Л	Л	И	И

1.33. *Решение.*

1) Используя преобразования к логически эквивалентным выражениям для операций отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации, получим:

$$\textbf{не } A \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ или } (\textbf{не } A) = A \mid A;$$
$$A \textbf{ или } B \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A) \textbf{ или не } (\textbf{не } B) = (A \mid A) \mid (B \mid B);$$
$$A \textbf{ и } B \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A \textbf{ или не } B) = (A \mid B) \mid (A \mid B);$$
$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ или } B \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ или не } (\textbf{не } B) = A \mid (B \mid B).$$

2) Задание выполняется аналогично пункту 1):

$$\textbf{не } A \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ и } (\textbf{не } A) = A \downarrow A;$$
$$A \textbf{ или } B \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A \textbf{ и не } B) = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B);$$
$$A \textbf{ и } B \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A) \textbf{ и не } (\textbf{не } B) \Leftrightarrow \textbf{не } A \downarrow \textbf{не } B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B);$$
$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ или } B \Leftrightarrow \textbf{не } (A \textbf{ и не } B) \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A \downarrow B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textbf{не } ((A \downarrow A) \downarrow B) = ((A \downarrow A) \downarrow B) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow B).$$

1.34. *Ответ:*

1) $A \downarrow B \Leftrightarrow ((A \mid A) \mid (B \mid B)) \mid ((A \mid A) \mid (B \mid B))$;

2) $A \mid B \Leftrightarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$.

1.35. *Ответ:* предикатами являются предложения 2)–4).

1.36. *Ответ:*

1) **не** $P(n) = \{$натуральное число n является нечетным$\}$;

2) **не** $P(x, y) = \{x \geqslant y\}$.

1.37. *Решение.*

Запишем отрицание выражения T и воспользуемся логическими эквивалентностями **не** $\forall x\ (P(x)) \Leftrightarrow \exists x$ **не** $(P(x))$ и **не** $\exists x\ (P(x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x$ **не** $(P(x))$:

$$\begin{aligned} 1)\quad \textbf{не}\, T \quad &= \textbf{не}\, \forall x\, (\exists y\, (P(x,y)) \Leftrightarrow \exists x\, (\textbf{не}\, \exists y\, (P(x,y))) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x\, (\forall y\, (\textbf{не}\, P(x,y))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\quad \textbf{не}\, T \quad &= \textbf{не}\, \exists x\, (\exists y\, (P(x,y)) \Rightarrow Q(x,y)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x\, (\textbf{не}\, (\exists\, y(P(x,y))) \Rightarrow Q(x,y)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x\, (\exists y\, (P(x,y))\ \textbf{и не}\ Q(x,y)). \end{aligned}$$

1.38. *Решение.*

1) Высказывание $\forall x\, (\exists y\, (x > y))$ означает «для каждого вещественного числа x найдется некоторое число y, которое меньше x». Это истинное высказывание.

2) Высказывание $\forall x\, (x \neq 0 \Rightarrow \exists y\, (xy = 1))$ означает «для каждого ненулевого значения x существует обратное число y, такое, что $xy = 1$». Это истинное высказывание.

1.39. *Ответ:*

1) истинно;

2) ложно.

1.40. *Решение.*

Воспользовавшись определением предела числовой последовательности, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \ \Leftrightarrow\ \textbf{не}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Последовательно вносим операцию отрицания под знаки кванторов:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n \neq a \ \Leftrightarrow\ &\textbf{не}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \textbf{не}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \textbf{не}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \textbf{не}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0\ \textbf{и}\ |a_n - a| \geqslant \varepsilon). \end{aligned}$$

При вычислении отрицания импликации была использована эквивалентность $P \Rightarrow Q \ \Leftrightarrow\ $ **не** P **или** Q.