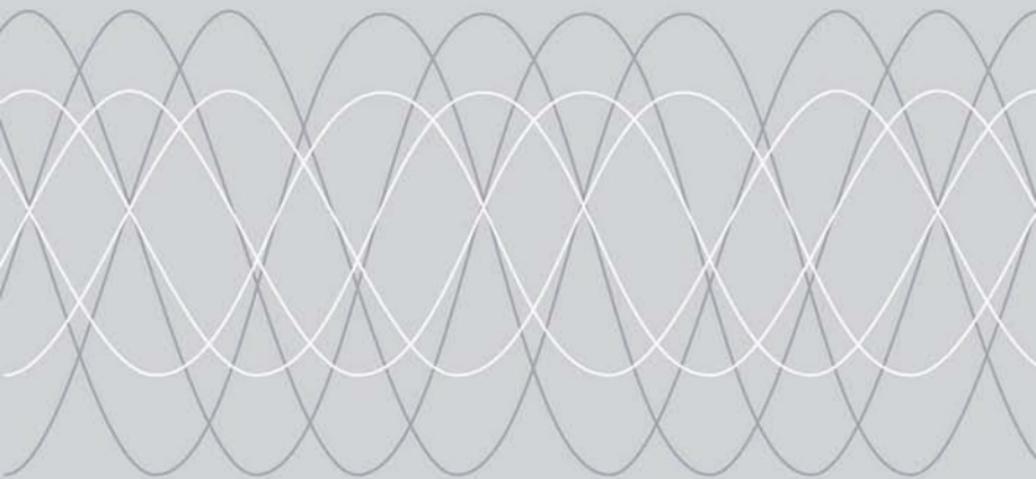


В. М. Бабич, А. П. Киселев

УПРУГИЕ ВОЛНЫ **ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ** **ТЕОРИЯ**



В. М. Бабич
А. П. Киселев

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ

ТЕОРИЯ

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»

2014

УДК 51+53
ББК 22
Б12

Бабич, В. М.

Б12 Упругие волны. Высокочастотная теория / В. М. Бабич, А. П. Киселев. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 320 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3305-8

Книга является подробным руководством по современной теории высокочастотных упругих волн, известной как лучевой метод или геометрическая акустика. Излагаются основы динамической теории упругости и теории плоских и сферических волн. Подробно изложен лучевой метод для объемных волн в изотропной и анизотропной средах и для волн Рэлея на поверхности неоднородного анизотропного упругого тела. Приведено выражение для фазы Берри. Рассмотрено много материала, не затрагивавшегося ранее в монографиях: теория волны S от центра расширения в неоднородной среде, лучевая теория волны S^* , аномальная поляризация, доказательство существования волны Рэлея в анизотропном полупространстве и др. Приведен учебный материал по вариационному исчислению, обобщенным функциям, тензорному анализу, необходимый для читателя, не имеющего достаточной физико-математической подготовки.

Для научных работников, аспирантов и студентов

УДК 51+53
ББК 22

*Издание подготовлено при финансовой поддержке
Санкт-Петербургского научного центра РАН*

Рецензент:

А. Б. Плаченов, канд. физ.-мат. наук, доцент Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики

Подписано в печать 15.12.14.
Формат 60×90^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20.
Тираж 700 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.
Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена математическим основам теории высокочастотных упругих волн. Естественно, она буквально пронизана асимптотическими методами (большим параметром является частота). Целью авторов было не только ясно изложить эти основы, но и не завуалировать при этом их математическую красоту. К счастью, математическая красота несовместима с усложненностью и витиеватостью математического аппарата. Почти весь текст доступен читателю со стандартным физическим (и даже с хорошим техническим) образованием. Когда требуется привлечь более возвышенную математику, делаются необходимые разъяснения.

Мы начинаем с вывода динамических уравнений линейной теории упругости. Далее излагается теория плоских объемных и поверхностных волн (в частности, такой нетривиальный вопрос, как существование волны Рэлея в анизотропном полупространстве). Строятся решения задач о точечных источниках колебаний, соответствующие уходящим на бесконечность волнам, и доказываются соответствующие теоремы единственности. Дается весьма подробное изложение лучевого метода для объемных волн в изотропном и анизотропном случаях. Лучевой метод понимается как асимптотическое описание высокочастотной волны, в первом приближении похожей на плоскую, характеристики которой медленно изменяются от точки к точке. Важную роль играет восходящая к Н. А. Умову трактовка энергии как жидкости, льющейся с групповой скоростью и подчиняющейся уравнению неразрывности. Введенное авторами понятие локальной плоской волны позволяет придать этой “энерго-гидродинамике” точный смысл. Излагаются такие физико-математические “деликатесы”, как взгляд на закон Рытова, управляющий вращением вектора поляризации поперечной волны, как на параллельный перенос в римановой метрике. С помощью метода пограничного слоя найдено выражение для поперечной волны от центра расширения в плавно-неоднородной среде. Дана лучевая трактовка “нелучевой” волны S^* . Изложена лучевая теория распространения волны Рэлея вдоль границы гладкого упругого тела и найдено математическое выражение для так называемой фазы Берри.

Таково в самых кратких словах содержание этой книги, в большой мере отражающей исследования авторов.

Авторы признательны ряду коллег за консультации и помощь. Это, прежде всего, И. В. Камоцкий, Б. М. Каштан, Н. Я. Кирпичникова, П. В. Крауклис, О. В. Мотыгин, А. М. Тагирджанов, Л. Ю. Фрадкин, Дж. Хадсон, И. Д. Цванкин, П. Чедвик, А. Л. Шувалов, Т. Б. Яновская. Особенная благодарность А. Б. Плачену, героическая работа которого по улучшению текста далеко выходит за пределы обязанностей редактора.

ВВЕДЕНИЕ

Книга является руководством по современной теории высокочастотных упругих волн. Эта теория, с одной стороны, важна для сейсмологии, акустики и других приложений, с другой — тесно связана с современными асимптотическими методами математической физики, римановой и финслеровой геометрии, вариационным и тензорным исчислением, функциональным анализом. Теорию линейных высокочастотных упругих волн сейчас можно считать более или менее завершенной, поэтому систематическое изложение ее основ представляется нам своевременным.

В книге рассматриваются в основном волны, локально, в окрестности каждой точки, похожие на плоские, характеристики которых мало меняются на расстоянии порядка длины волны (таковы, например, классические сферические волны вне окрестности точки источника). Под словом *волна* мы понимаем, как правило, решение уравнений теории упругости именно такого типа. Волны, как оказывается, распространяются вдоль лучей, понятие о которых образованный человек имеет из геометрической оптики. Сказанное допускает уточнение и, более того, четкую математическую трактовку, воплощением которой и является лучевой метод. Поведение волнового поля в окрестности особых точек поля лучей мы, как правило, не рассматриваем (исключением является окрестность точечного источника, главы 3 и 6). Таким образом, речь идет в основном о волнах *в случае общего положения*, — “для всех случаев, кроме некоторых исключительных” (Арнольд В. И., *Теория катастроф*, М.: Наука, 1989).

Изложение асимптотической теории упругих волн в этой книге во многом базируется на оригинальных работах авторов. Оно имеет две особенности. Это, во-первых, введение в качестве фундаментального понятия локально-плоских волн. Во-вторых, это систематическое использование вариационных соображений.

Мы рассматриваем только идеальную упругость и линейную динамическую теорию. Взамен точного и распространенного, но неуклюжего выражения “динамическая теория упругости”, мы пользуемся термином *эластодинамика*.

Охарактеризуем содержание глав книги.

Первая глава посвящена введению в классическую линейную эластодинамику. Вывод уравнений и граничных условий базируется на

естественном предположении, что любой объем внутри упругой среды можно рассматривать как механическую систему, к которой применим принцип Гамильтона.

Во второй главе мы переходим к простейшим и вместе с тем важнейшим волновым решениям — плоским волнам.

Первая часть главы посвящена объемным плоским волнам в однородных средах. Излагается классическая в сущности теория плоских волн в изотропной и анизотропной средах, вводятся понятия волнового вектора, фазовой и групповой скоростей. Изучение плоских волн дает толчок к введению для неоднородной среды понятия локальной скорости, позволяющего четко сформулировать теоремы об области влияния и теоремы единственности. Теоремы эти доказаны для общей анизотропной среды с компактными включениями в предположении некоторой гладкости решения. Далее изучается отражение—преломление и так называемый обмен (конверсия) на простейшей границе упругого тела — свободной границе изотропного полупространства. Приводится решение задачи о падении на такую границу нестационарной волны произвольной формы, требующее в случае полного внутреннего отражения рассмотрения сопряженных гармонических функций.

Во второй части главы изучаются плоские поверхностные волны. После изложения теории классических волн Рэлея и Лява рассматриваются волны в слоистых изотропных и анизотропных средах. Устанавливается ряд существенных фактов о плоских поверхностных волнах в слоистой среде, в частности, теорема о групповой скорости. Глава заканчивается вариационным доказательством существования волны Рэлея в однородном анизотропном полупространстве.

Основное место в главе 3 занимают вопросы, связанные с полями точечных источников в безграничной изотропной среде. Сначала напоминаются простейшие сведения из теории обобщенных функций. Дальше по отдельности рассматриваются гармонические и нестационарные точечные источники. Рассмотрены задачи о сферических излучателях, для которых точечные центр расширения и центр вращения служат простыми (с математической точки зрения) моделями. Отмечено, что поля точечных источников в дальней зоне напоминают плоские волны, но имеют аномалии поляризации. Такие аномалии в дальнейшем систематически возникают в рамках лучевого метода. Приведены разные варианты теорем единственности для волн, уходящих на бесконечность. В случае общей анизотропии доказана теорема о принципе предельного поглощения, выделяющем уходящее решение для среды с затуханием. Дан набросок доказательства единственности решения задачи Коши для нестационарных решений. В отличие от главы 2, здесь среда однородна и изотропна, но решения могут быть обобщенными функциями. Для изотропного случая сформулиро-

вана теорема об условиях Джонса, обобщающих классические условия Зоммерфельда.

Глава 4 является основой высокочастотной теории. В ней подробно излагаются классические результаты лучевого метода для изотропной среды. Теория уравнения эйконала (или, по принятой в сейсмике терминологии, *кинематика*) строится на классической вариационной основе. Кратко намечена теория комплексного эйконала. Вводится фундаментальное понятие *локальной плоской волны*. Это понятие дает возможность смотреть на распространение волны как на быстрый процесс, описываемый локальной плоской волной, характеристики которой (такие, как вектор скорости, фаза, амплитуда) меняются относительно медленно. Для плотности энергии локальной плоской волны выводится *уравнение Умова*, которое можно интерпретировать как уравнение неразрывности *энергетической жидкости*. Классическая теория этого уравнения позволяет найти главные приближения для интенсивностей волн P и S . Они содержат “произвольные” множители, т. н. дифракционные коэффициенты. Чтобы определить их, требуется дополнительная информация о, как говорят в сейсмике, *динамике* волнового процесса. Рассмотрены высшие приближения. В частности, выписаны формулы для аномально поляризованных составляющих. Коротко рассмотрена задача об отражении поля, заданного лучевым разложением, от, вообще говоря, криволинейной свободной границы. Формулы лучевого метода проинтерпретированы в терминах римановой геометрии, азы которой изложены тут же. В конце главы выведены явные выражения для геометрического расхождения, необходимые при вычислении амплитуд. Это общая формула для однородной среды и формулы, описывающие отражение — преломление на границе раздела двух сред в двумерном случае.

Глава 5 обобщает лучевой метод для объемных волн на неоднородную анизотропную среду. Здесь, в отличие от главы 4, уравнение эйконала (кинематика) изучается на основе теории характеристик. Высшие приближения рассмотрены в предположении, что локальная плоская волна невырождена. Продемонстрировано, что в анизотропном случае существенную роль играет финслерова геометрия.

Глава 6 посвящена вычислению дифракционных коэффициентов для точечных источников. Показано, как с помощью элементарных соображений локальности найти главные (по принятой терминологии — нулевые) приближения для любого точечного источника в плавно-неоднородной изотропной среде. Решены непростые задачи о нахождении в такой среде волны S от центра расширения и волны P от центра вращения. Для этого привлечена техника погранслоя.

Глава 7 посвящена лучевому описанию наделавшей в начале 1980-х годов много шума “нелучевой” S^* -волны. Она связана с эффектом пол-

ного внутреннего отражения и возникает в закритической области от близкого к границе раздела точечного источника, который возбуждает волны P . Авторам удалось получить выражение для волны S^* в рамках лучевого метода с использованием трюка, основанного на теореме взаимности.

В последней, *главе 8*, построены лучевые формулы для рэлеевской волны, распространяющейся вдоль гладкой поверхности анизотропного неоднородного тела. Выведен соответствующий аналог уравнения Умова. Его анализ позволяет найти интенсивность волны Рэля в первом приближении. Получено явное выражение для возникающего в процессе распространения приращения фазы, называемого теперь фазой Берри. Рассмотрен частный случай изотропного неоднородного тела, когда формулы, оставаясь чрезвычайно громоздкими, допускают большие упрощения. Эта глава выделяется объемом преодолеваемых в ней аналитических трудностей. Книгу завершает небольшое *приложение*, содержащее сведения из геометрии поверхностей и тензорного анализа, которые необходимы для понимания последней главы.

Главы делятся на разделы, а разделы — на пункты. Звездочкой \star помечены разделы и пункты (в основном, использующие более возвышенную математику, чем в основном тексте книги), которые можно пропустить при первом чтении.

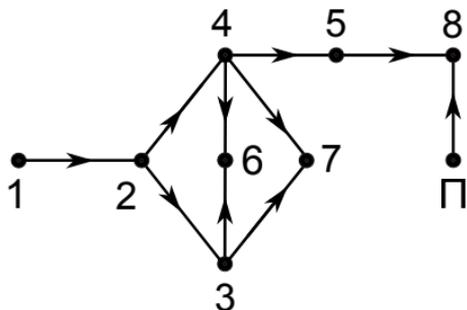


Рис. 1. Взаимозависимость глав. П — приложение

Часто встречающиеся обозначения

$:=$ и $=:$ — равенства по определению

\mathbb{R} — вещественные числа

\mathbb{R}^m — m -мерное евклидово пространство

Re , Im — вещественная и мнимая части

$*$ — комплексное сопряжение

По повторяющимся нижним латинским значкам, если не сделано соответствующей оговорки, подразумевается суммирование от 1 до 3, по повторяющимся нижним греческим — от 1 до 2, например $f_j g_j := f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3$, $h_\alpha k_\alpha := h_1 k_1 + h_2 k_2$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_l v_l := \sum_{l=1}^3 u_l v_l$ — свертывание в \mathbb{R}^3

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* = u_l v_l^*$ — комплексное скалярное произведение (кроме главы 8)

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ — векторное произведение

\mathbf{e}_j , $j = 1, 2, 3$ — орты осей $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, образующие правую тройку

\mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности

\mathbf{n} — единичная нормаль к кривой

a, b — скорости P - и S -волн

$(a_{ij}) = \|a_{ij}\|$ — матрица с элементами a_{ij}

$\mathbf{I} = \|\delta_{ij}\|$ — единичная матрица

\mathfrak{L} — оператор Ламе, $(\mathfrak{L}\mathbf{U})_i \equiv \mathfrak{L}_i(\mathbf{U}) := \partial_j (c_{ijkl} \partial_k U_l)$

$\mathbf{L} = \mathfrak{L} - \rho \mathbf{I} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — нестационарный оператор Навье

$l = \mathfrak{L} + \rho \omega^2 \mathbf{I}$ — гармонический оператор Навье

$\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$, $\ddot{} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — производные по времени

\star — разделы и пункты, которые можно опустить при первом чтении

Глава 1

Основные понятия линейной эластодинамики

Эта глава имеет вводный характер; в ней вводятся классические понятия теории упругости, которые будут постоянно встречаться в дальнейшем.

1.1. Смещения, деформации, напряжения

Смещение и напряжение — основные понятия теории упругости.

1.1.1. Вектор смещения и тензор деформации

Пусть \mathbf{x} — точка в *упругой среде* (или, что то же самое, в упругом теле), а x_1, x_2, x_3 — ее декартовы координаты, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Когда среда подвергается деформации, координаты материальной точки, находившейся в состоянии равновесия в \mathbf{x} , изменяются и становятся равными $\mathbf{x} + \mathbf{u} = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$. *Вектор смещения* \mathbf{u} зависит от \mathbf{x} и от времени t , $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Зависимость от t будет иногда опускаться.

Процесс деформирования характеризуется изменением расстояний между близко расположенными точками среды \mathbf{x} и $\mathbf{x} + d\mathbf{x} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. При деформации они переходят соответственно в $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$.

До деформации квадрат расстояния между \mathbf{x} и $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ равнялся

$$d\sigma^2 = (d\mathbf{x})^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2,$$

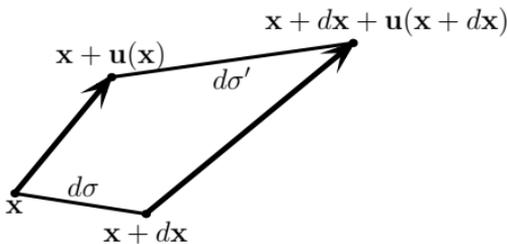


Рис. 1.1. Деформирование среды

а после стал

$$d\sigma'^2 = (d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2.$$

Изменение квадрата расстояния равно, в старшем порядке по dx_i ,

$$\begin{aligned} d\sigma'^2 - d\sigma^2 &= \sum_{i=1}^3 \left(dx_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right)^2 - \sum_{i=1}^3 (dx_i)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Считая, что все $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ малы, опустим (что соответствует гипотезе о *геометрической линейности* среды) члены высшего порядка $\sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}$, и получим

$$d\sigma'^2 - d\sigma^2 = 2\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx_i dx_j. \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся нижним латинским значкам подразумевается суммирование от 1 до 3, а

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Очевидно,

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{ji}(\mathbf{u}). \quad (1.3)$$

Симметричная матрица $\varepsilon = \|\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\|$, называется *тензором деформации* (Коши)¹. Тензоры деформаций и напряжений — одни из первых тензоров в истории науки.

1.1.2. Тензор напряжений

Теперь введем напряжение, имеющее, в отличие от определяемых геометрически смещения и деформации, механическую природу. Рассмотрим ориентированный элемент поверхности $d\mathcal{S}$, т. е. будем считать заданным направление нормали \mathbf{n} к нему. Пусть $d\mathcal{S}$ лежит внутри или на границе упругого тела. По старинному обычаю, обозначим через $\mathbf{t}^{\mathbf{n}} d\mathcal{S}$ силу, действующую на $d\mathcal{S}$ с той стороны, куда направлена \mathbf{n} , см. рис. 1.2, так что $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ — поверхностная плотность этой силы. Отметим очевидную формулу

$$\mathbf{t}^{-\mathbf{n}}(\mathbf{u}) = -\mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}), \quad (1.4)$$

выражающую 3-й закон Ньютона.

¹Такая трактовка тензора возможна до тех пор, пока мы ограничиваемся рассмотрением декартовых систем координат. Теория тензоров, приспособленная к рассмотрению произвольных координат, намечена в приложении 8.4.

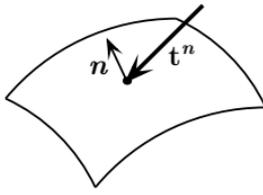


Рис. 1.2. Сила, действующая на элемент поверхности

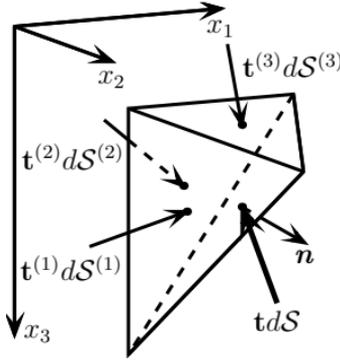


Рис. 1.3. Поверхностные силы, действующие на тетраэдр

На рис. 1.3 изображен бесконечно малый тетраэдр, выделенный нашим воображением внутри среды. Применим к нему 2-й закон Ньютона $m\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}$, где m — его масса, \mathbf{w} — ускорение его центра тяжести, а $\mathbf{\Phi}$ — результирующая сила, действующая на него. Тетраэдр подвергается действию внешних по отношению к нему поверхностных сил со стороны остальной части среды, а также действию объемных сил (таких, например, как гравитация). Пусть длины ребер тетраэдра имеют порядок $O(h)$, тогда его объем порядка $O(h^3)$, а поверхность порядка $O(h^2)$. Таковы же порядки действующих на тетраэдр объемной и поверхностных сил. Пусть три стороны нашего тетраэдра параллельны координатным плоскостям, их площади пусть $dS^{(1)}$, $dS^{(2)}$ и $dS^{(3)}$, а внешние нормали к ним направлены навстречу осям координатных осей \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 . Площадь четвертой грани и внешнюю нормаль к ней обозначим через dS и $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, см. рис. 1.3. Будем считать вектор \mathbf{n} единичным,

$$|\mathbf{n}|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Сравнение членов порядка $O(h^2)$ во втором законе Ньютона дает

$$-\mathbf{t}^{\mathbf{e}_1} dS^{(1)} - \mathbf{t}^{\mathbf{e}_2} dS^{(2)} - \mathbf{t}^{\mathbf{e}_3} dS^{(3)} + \mathbf{t}^{\mathbf{n}} dS = 0.$$

Замечая, что

$$dS^{(j)} = n_j dS, \quad (1.5)$$

мы имеем

$$\mathbf{t}^n = \mathbf{t}^{e_1} n_1 + \mathbf{t}^{e_2} n_2 + \mathbf{t}^{e_3} n_3 = \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{t}^{e_j}.$$

Величины $\mathbf{t}_k^{e_j}$ можно рассматривать как элементы матрицы $\sigma = \|\sigma_{kj}\|$, которые мы обозначим через

$$\sigma_{kj} = \mathbf{t}_k^{e_j}. \quad (1.6)$$

Матрица σ называется *тензором напряжения*. Очевидно,

$$\mathbf{t}_k^n = \mathbf{t}_k^n(\mathbf{u}) = \sigma_{kj} n_j. \quad (1.7)$$

Теория упругости основана на предположении, что напряжение однозначно определяются деформацией. В линейной теории упругости, которую мы только и будем рассматривать, между ними предполагается линейная связь (ее обсуждение мы отложим до п. 1.3.2).

Сейчас же мы напомним основы лагранжева подхода, который используем дальше для вывода уравнений эластодинамики. Лагранжев подход заключается в том, что основные уравнения выводятся методами вариационного исчисления из принципа Гамильтона, т. е. условия стационарности функционала действия.

1.2. Лагранжев подход к механическим системам

Вывод уравнений движения мы будем основывать на предположении, что любой объем, выделенный в упругой среде, можно рассматривать как механическую систему, движение которой описывается исходя из принципа Гамильтона. Это предположение естественное и согласующееся с принятой в теоретической физике точкой зрения, что фундаментальные физические законы могут быть представлены в виде требования стационарности некоторого функционала (см., например, лекции Фейнмана [10]). Это очень сильное предположение, поскольку принцип Гамильтона приводит к уравнениям, имеющим уникальные свойства. С гамильтоновостью уравнений связаны их самосопряженность и энергетические соотношения, в частности, такое фундаментальное, как закон сохранения энергии, имеющий вид теоремы Умова — Пойнтинга.

Напомним сначала основные положения механики систем с конечным числом степеней свободы. Такую систему можно описывать в

терминах функции Лагранжа $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^2$. Во многих важных случаях L представляет собой разность кинетической $K(\dot{\mathbf{q}})$ и потенциальной $W(\mathbf{q})$ энергий. Здесь $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ — обобщенные координаты, $\dot{\mathbf{q}} := d\mathbf{q}/dt$, а m — число степеней свободы. В линейной теории предполагается, что K и W — квадратичные формы относительно $\dot{\mathbf{q}}$ и \mathbf{q} ,

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{i,j=m} K_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{и} \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{i,j=m} W_{ij} q_i q_j,$$

причем матрицы $\|K_{ij}\|$ и $\|W_{ij}\|$ — положительно определенные.

Движением системы в отсутствие внешних сил управляет *принцип Гамильтона*. Он утверждает, что в течение произвольно выбранного отрезка времени $t_1 \leq t \leq t_2$ изолированная система ведет себя так, что *функционал*³ $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ стационарен, т. е. его вариация равна нулю,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (1.8)$$

Напомним на этом примере, что такое *вариация*. Дадим функциям q_l приращения δq_l , т. е. подставим в интеграл (1.8) вместо q_l суммы $q_l + \delta q_l$. Здесь вариации координат δq_l — произвольные гладкие функции, обращаемые в нуль в моменты $t = t_1$ и $t = t_2$,

$$\delta q_l|_{t=t_1} = \delta q_l|_{t=t_2} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (1.9)$$

В других задачах могут быть и другие предположения относительно δq_l . По формуле Тейлора

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}}) dt &= \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta \dot{q}_l \right) dt \\ &+ O \left(\int_{t_1}^{t_2} ((\delta \mathbf{q})^2 + (\delta \dot{\mathbf{q}})^2) dt \right), \end{aligned}$$

$(\delta \mathbf{q})^2 + (\delta \dot{\mathbf{q}})^2 = \sum_{l=1}^{l=m} (\delta q_l)^2 + \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{d}{dt} \delta q_l \right)^2$. *Вариацией* функционала (1.8) называется выражение

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt := \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta \dot{q}_l \right) dt, \quad (1.10)$$

²В этой связи см., например, Ландау и Лифшиц [4]

³Функционал — это отображение некоторого множества функций в множество чисел. Сейчас мы задаем функции q_i и получаем числа $\int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), \dots, q_m(t), \frac{dq_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dq_m(t)}{dt}) dt$.

где

$$\delta \dot{q}_l = \frac{d}{dt} \delta q_l.$$

Это — линейный функционал от δq_l . Потребуем, чтобы в процессе движения системы для произвольных δq_l , для которых выполнено (1.9), выражение (1.10) равнялось нулю. Интегрирование по частям дает

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l dt + \sum_{l=1}^{l=m} \frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l \Big|_{t_1}^{t_2},$$

и из (1.8) и (1.9) следует

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l dt = 0.$$

Вследствие произвольности δq_l , пользуясь *леммой Лагранжа*⁴, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (1.11)$$

В случае неизолированной системы, когда внешние воздействия описываются посредством обобщенных сил \mathcal{F}_j , уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = -\mathcal{F}_l, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (1.12)$$

Для включения внешних сил в вариационное уравнение мы заменим (1.8) на

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \mathcal{F}_l \delta q_l dt = 0. \quad (1.13)$$

Вывод (1.12) из (1.13) совершенно аналогичен получению (1.11).

Выражение (1.13) можно было бы назвать основной аксиомой лагранжевой механики (для случая линейных систем с конечным числом степеней свободы).

1.3. Уравнения эластодинамики

Уравнения, описывающие динамику упругой среды, можно элементарным образом получить из рассмотрения второго закона Ньютона для

⁴Пусть $\psi(t)$ — фиксированная непрерывная при $t_1 \leq t \leq t_2$ функция, и для любой гладкой функции $\eta(t)$, такой что $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, интеграл $\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\eta(t)dt$ равен нулю. Тогда $\psi(t)$ равна нулю тождественно на $[t_1, t_2]$.

бесконечно малого объема (как это делается, например, в прекрасных классических учебниках Зоммерфельда [3], Лява [7] и др.). Мы делаем это на основе лагранжева подхода, использование которого даст нам впоследствии значительные выгоды.

Будем рассматривать упругую среду как механическую систему, правда, уже с континуальным числом степеней свободы. В русской литературе для таких задач принят удачный термин “системы с распределенными параметрами”. Вектор смещения \mathbf{u} будет аналогом обобщенных координат; он “нумеруется”, вместо $l = 1, 2, \dots, m$ непрерывными переменными x_1, x_2 и x_3 . Поэтому суммирование по l придется заменить на интегрирование по объему, занимаемому средой.

1.3.1. Кинетическая и потенциальная энергии как квадратичные функционалы

Рассмотрим произвольно выбранный объем Ω внутри среды. Пусть на Ω действуют внешние силы, как поверхностные, так и объемные. Введем *плотность функции Лагранжа* как разность плотностей кинетической и потенциальной энергии среды

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{W}. \quad (1.14)$$

Плотность кинетической энергии равна

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}\rho \dot{\mathbf{u}}^2, \quad (1.15)$$

где $\rho = \rho(\mathbf{x})$ обозначает *объемную плотность массы*, которая всегда будет предполагаться положительной. Мы делаем фундаментальное для *теории упругости* предположение: плотность потенциальной энергии определяется в каждой точке тензором деформации \mathcal{W} ,

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})). \quad (1.16)$$

Поскольку мы собираемся заниматься только линейной теорией упругости, у нас \mathcal{W} будет положительно определенной квадратичной формой относительно компонент тензора деформации ε_{ij} . Мы предположим, что плотность потенциальной энергии (1.16) является квадратичной формой от $\boldsymbol{\varepsilon}$ (т. е. выражением, однородным второго порядка относительно компонент $\boldsymbol{\varepsilon}$)

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x}). \quad (1.17)$$

Из (1.17) легко следует, что c_{ijkl} — тензор четвертого порядка. Он называется *тензором упругих модулей*.

1.3.2. Свойства упругих модулей

В силу симметричности тензора деформаций без ограничения общности можно считать, что тензор c_{ijkl} обладает свойствами симметрии⁵

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}. \quad (1.18)$$

Тензор четвертого порядка, удовлетворяющий соотношениям симметрии (1.18), характеризуется, как нетрудно подсчитать, 21 параметром. Распространено описание упругих модулей с помощью симметричных матриц C_{pq} 6×6 , в котором принята следующая связь между параметрами ij и kl и числами p и q : $11 \leftrightarrow 1$, $22 \leftrightarrow 2$, $33 \leftrightarrow 3$, $23 = 32 \leftrightarrow 4$, $12 = 21 \leftrightarrow 5$, $13 = 31 \leftrightarrow 6$.

Весьма существенно естественное с физической точки зрения предположение, что потенциальная энергия является положительно определенной квадратичной формой от тензора деформаций, т. е.

$$c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \text{const} \sum_{i,j=1}^{i,j=3} (\varepsilon_{ij})^2 \quad (1.19)$$

для любого симметрического вещественного ε_{ij} и некоторой $\text{const} > 0$, причем $W = 0$ только, если $\varepsilon_{ij} = 0$ для всех i и j . Отсюда следует и неравенство для комплексных симметричных ε_{ij} ,

$$c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}^* \geq \text{const} \sum_{i,j=1}^{i,j=3} |\varepsilon_{ij}|^2, \quad (1.20)$$

которое потребуется нам в дальнейшем.

1.3.3. Вывод уравнений эластодинамики

Функцию Лагранжа для объема Ω мы определяем по формуле

$$L = K - W = \int_{\Omega} K d\mathbf{x} - \int_{\Omega} W d\mathbf{x}. \quad (1.21)$$

Здесь K — *кинетическая энергия* объема Ω , а W — его *потенциальная энергия*. Через $d\mathbf{x}$ мы обозначаем элемент трехмерного объема.

Рассмотрим динамику произвольного (не предполагаемого малым) объема Ω в течение интервала времени

$$t_1 \leq t \leq t_2.$$

⁵Если $c_{ijkl} \neq c_{jikl}$, то симметрии c_{ijkl} по первой паре индексов можно добиться, заменив c_{ijkl} и c_{jikl} на $\frac{1}{2}(c_{ijkl} + c_{jikl})$, что не изменит значения квадратичной формы (1.17). Аналогично можно добиться и симметрии по второй паре индексов. Если $c_{ijkl} \neq c_{klij}$, то c_{ijkl} и c_{klij} следует заменить на $\frac{1}{2}(c_{ijkl} + c_{klij})$.

По аналогии с (1.13) мы рассмотрим принцип Гамильтона в форме

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F_i \delta u_i d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega} f_i \delta u_i dS = 0. \quad (1.22)$$

Здесь $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ — плотность объемных сил (т. е. сил, действующих внутри Ω), $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ — плотность поверхностных сил, действующих извне на границу $\partial\Omega$ объема Ω , а dS — элемент площади его поверхности, т. е. $\mathbf{t}^n(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$. Внешние силы обоих типов рассматриваются как заданные. Внешние силы (особенно объемные) часто называются *источниками (колебаний)*. Напомним, см. (1.7), что

$$\sigma_{kj} n_j = f_k. \quad (1.23)$$

В этом пункте мы подчиняем вариации аналогу условия (1.9)

$$\delta \mathbf{u}|_{t_1} = \delta \mathbf{u}|_{t_2} = 0. \quad (1.24)$$

Мы понимаем (1.22) следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left(\rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} \right) d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F_i \delta u_i d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega} f_i \delta u_i dS = 0,$$

где

$$\delta \dot{u}_i := \frac{\partial}{\partial t} \delta u_i,$$

и

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j \right).$$

Применим теорему Остроградского — Гаусса,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} A_j d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} A_j \cos(\widehat{nx}_j) dS, \quad (1.25)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ — произвольный гладкий вектор, $\cos(\widehat{nx}_j)$ — направляющие косинусы внешней нормали \mathbf{n} к границе $\partial\Omega$, а dS — элемент ее площади. Интегрируя по частям и пользуясь симметрией тензора смещений ε_{ij} (1.3), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \rho \ddot{u}_j + F_j \right) \delta u_i d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega} \left(f_i - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j \right) \delta u_i dS = 0. \quad (1.26)$$

Независимость вариаций δu_i , $i = 1, 2, 3$, дает

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \rho \ddot{u}_j = -F_j, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.27)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j = f_i, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.28)$$

Сравнивая (1.28) и (1.23), получаем

$$\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) n_j = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

Вследствие произвольности Ω , отсюда следует

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.29)$$

Из (1.29) и (1.17) следует, что

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (1.30)$$

Среда, для которой выполняется закон Гука (1.30), называется *физически линейной*. Из (1.18) и (1.30) следует симметрия $\boldsymbol{\sigma} = \|\sigma_{ij}\|$,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.31)$$

Перепишем теперь (1.27), (1.29) и (1.23) в виде

$$\rho \ddot{u}_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.32)$$

и

$$\mathbf{t}^n(\mathbf{u})|_{\partial \Omega} = \mathbf{f}, \quad (1.33)$$

что согласуется с определением поверхностных сил.

Уравнения (1.32) — это уравнения движения упругой среды. Они выражают второй закон Ньютона для произвольного объема среды. Для этой системы трех уравнений второго порядка существует удачный, хотя мало еще распространенный в русскоязычной литературе термин *уравнения эластодинамики*.

Краевые условия, являющиеся следствием вариационного принципа, в вариационном исчислении называют *естественными граничными условиями*. Таково условие (1.33).

1.3.4. Операторы Навье и Ламе

Уравнения эластодинамики (1.32) приобретают вид

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = -\mathbf{F}, \quad (1.34)$$

где матричный дифференциальный оператор Навье \mathbf{L} имеет компоненты

$$L_i(\mathbf{u}) \equiv (\mathbf{L}\mathbf{u})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.35)$$

Запишем его также в виде

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\varepsilon} - \rho \mathbf{I} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (1.36)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица 3×3 , а $\boldsymbol{\varepsilon}$ — оператор Ламе,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{u}) \equiv (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1.37)$$

Выражение для плотности поверхностных сил (1.28) записывается в виде

$$t_i^n(\mathbf{u}) = c_{ijkl} n_j \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = c_{ijkl} n_j \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (1.38)$$

1.4. Классические граничные условия

До сих пор мы оперировали с элементарным объемчиком внутри среды, окруженным произвольно выбранной воображаемой поверхностью, которая целиком лежала внутри среды с непрерывно меняющимися свойствами. Теперь перейдем к рассмотрению волновых процессов на границе упругой среды и на границе между двумя физически различными упругими средами. Сначала приведем несколько разумных граничных условий, а затем посмотрим на них с лагранжевой точки зрения.

1.4.1. Список граничных условий

Физическую границу упругой среды будем обозначать через \mathcal{S} , см. рис. 1.4. Мы сформулируем сейчас два типа граничных условий на границе \mathcal{S} (предполагая ее достаточно гладкой).

Граница упругого тела

1. Контакт с абсолютно жестким телом вдоль \mathcal{S} описывается условием

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.39)$$

где $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ — заданный вектор, описывающий смещение поверхности под действием внешнего тела. Равенство (1.39) напоминает условие Дирихле в теории скалярных волн. Частным случаем (1.39) является

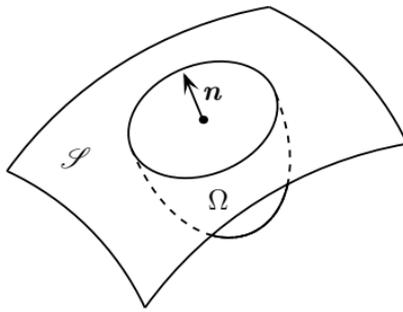


Рис. 1.4. Объем, прилегающий к границе тела

условие отсутствия смещений на границе,

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{S}} = 0. \quad (1.40)$$

2. Контакт с абсолютно мягким телом описывается условием

$$\mathbf{t}^n(\mathbf{u})|_{\mathcal{S}} = \mathbf{f}, \quad (1.41)$$

где \mathbf{n} — единичная внешняя (по отношению к нашей среде) нормаль, а вектор $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, описывающий внешние поверхностные силы, считается заданным, см. (1.33).

Важен частный случай условия (1.41),

$$\mathbf{t}^n(\mathbf{u})|_{\mathcal{S}} = 0, \quad (1.42)$$

называемый случаем свободной от напряжений границы или просто случаем *свободной границы*. Это условие описывает контакт с вакуумом. Условия (1.41)–(1.42) похожи на условие Неймана.

Контакт двух упругих тел

Пусть \mathcal{B} — граница раздела двух различных упругих тел, см. рис. 1.5. Относящиеся к ним величины будем помечать значками I и II. Мы сформулируем два вида граничных условий на \mathcal{B} .

1. Условия жесткого контакта задаются в виде

$$\mathbf{u}_I|_{\mathcal{B}} = \mathbf{u}_{II}|_{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{t}_I^n|_{\mathcal{B}} = \mathbf{t}_{II}^n|_{\mathcal{B}} \quad (1.43)$$

или, в эквивалентной форме,

$$[\mathbf{u}]|_{\mathcal{B}} = 0, \quad [\mathbf{t}^n]|_{\mathcal{B}} = 0. \quad (1.44)$$

Здесь $[\]|_{\mathcal{B}}$ обозначает скачок соответствующей величины на \mathcal{B} . Таким

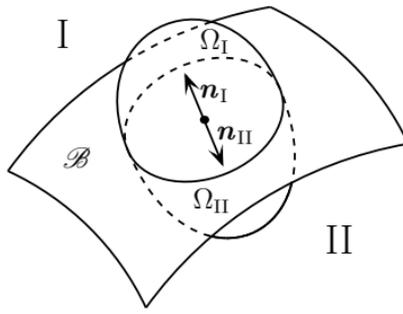


Рис. 1.5. Объем, разделенный поверхностью \mathcal{B}

образом, (1.43) и (1.44) — это условия на скачки смещений и их первых производных на \mathcal{B} .

Заметим, что, как следует из п. 1.3, эти условия автоматически выполняются на любых воображаемых поверхностях внутри упругого тела.

2. Чтобы описать *скользящий контакт* (контакт с проскальзыванием), разложим смещения и напряжения на границе на тангенциальные (T) и нормальные (N) к границе \mathcal{B} между I и II составляющие:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^T + \mathbf{u}^N, & \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{u}^N \times \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{t}^n &= \mathbf{t}^{nT} + \mathbf{t}^{nN}, & \mathbf{t}^{nT} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{t}^{nN} \times \mathbf{n} &= 0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где \mathbf{n} — как-либо выбранная единичная нормаль к \mathcal{B} . Условия *скользящего контакта* имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_I^N &= \mathbf{u}_{II}^N, & \mathbf{t}_I^{nN} &= \mathbf{t}_{II}^{nN}, \\ \mathbf{t}_I^{nT} &= \mathbf{t}_{II}^{nT} = 0, \end{aligned} \quad (1.46)$$

причем на скачок \mathbf{u}^T никаких условий не накладывается. Эти условия описывают контакт тел, проскальзывающих без трения вдоль бесконечно тонкого слоя невязкой жидкости.

Обсудим связь перечисленных выше условий с принципом Гамильтона.

1.4.2. Принцип Гамильтона и граничные условия

Граница упругого тела

Условие (1.41) (в частности, (1.42)) возникло при рассмотрении принципа Гамильтона, см. (1.23), и является естественным. Условие же (1.39)–(1.40) естественным не является.

Контакт двух упругих тел

Рассмотрим теперь случай границы раздела \mathcal{B} внутри упругого тела и применим принцип Гамильтона к области $\Omega = \text{I} + \text{II}$, см. рис. 1.5. Интегрируя по частям и используя граничные условия (1.28) на \mathcal{B} , мы преобразуем тождество (1.26) к виду

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}^{n_I}(\mathbf{u}_I) \cdot \delta \mathbf{u}_I + \mathbf{t}^{n_{II}}(\mathbf{u}_{II}) \cdot \delta \mathbf{u}_{II}] dS = 0, \quad (1.47)$$

где \mathbf{n}_I — единичная нормаль к \mathcal{B} , внешняя для I, а \mathbf{n}_{II} — единичная нормаль к \mathcal{B} , внешняя для II, так что $\mathbf{n}_I = -\mathbf{n}_{II}$. Используя (1.4), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}^n(\mathbf{u}_I) \cdot \delta \mathbf{u}_I - \mathbf{t}^n(\mathbf{u}_{II}) \cdot \delta \mathbf{u}_{II}] dS = 0, \quad (1.48)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}_I$.

1. Сначала предположим, что части I и II жестко склеены, т.е. смещения \mathbf{u}_I и \mathbf{u}_{II} на границе раздела \mathcal{B} равны, и соответственно $\delta \mathbf{u}_I = \delta \mathbf{u}_{II} := \delta \mathbf{u}$, где вектор $\delta \mathbf{u}$ произволен. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}^n(\mathbf{u}_I) - \mathbf{t}^n(\mathbf{u}_{II})] \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0, \quad (1.49)$$

и мы приходим к условиям жесткого контакта (1.44).

2. Теперь допустим проскальзывание частей I и II вдоль \mathcal{B} без пересечения и без отрыва друг от друга. Это значит, что касательные смещения \mathbf{u}_I^T и \mathbf{u}_{II}^T и их вариации $\delta \mathbf{u}_I^T|_{\mathcal{B}}$ и $\delta \mathbf{u}_{II}^T|_{\mathcal{B}}$ по обе стороны границы независимы, тогда как нормальные смещения \mathbf{u}_I^N и \mathbf{u}_{II}^N , $\delta \mathbf{u}_I^N$ и $\delta \mathbf{u}_{II}^N$ совпадают.

Мы можем переписать (1.48) в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}^{n^N}(\mathbf{u}_I) - \mathbf{t}^{n^N}(\mathbf{u}_{II})] \cdot \delta \mathbf{u}^N dS + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{t}^{n^T}(\mathbf{u}_I) \cdot \delta \mathbf{u}_I^T dS - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{t}^{n^T}(\mathbf{u}_{II}) \cdot \delta \mathbf{u}_{II}^T dS \right) = 0.$$

Из независимости вариаций $\delta \mathbf{u}^N$, $\delta \mathbf{u}_I^T$ и $\delta \mathbf{u}_{II}^T$ следует исчезновение всех трех интегралов по \mathcal{B} . Это влечет обращение в нуль множителей при вариациях, что и дает условия (1.46).

1.5. Изотропная среда

Рассмотрим очень специальный и, вместе с тем, очень важный класс упругих сред. Среда называется *изотропной* в точке \mathbf{x} , если ее упругие

свойства одинаковы по всем направлениям. Упругая среда изотропна, если она изотропна во всех своих точках. В противном случае она *анизотропна*.

Исходя из инвариантности плотности потенциальной энергии относительно поворотов координатных осей вокруг рассматриваемой точки \mathbf{x} , мы покажем сначала, что тензор упругих модулей изотропной среды характеризуется двумя скалярными величинами. Далее будут выведены содержащие эти величины неравенства, которые обеспечат положительную определенность потенциальной энергии.

1.5.1. Следствия инвариантности \mathcal{W} относительно вращений

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$ — многочлен $\det(\boldsymbol{\varepsilon} - \Lambda \mathbf{I})$ (\mathbf{I} — единичная матрица) относительно числового параметра Λ . Коэффициенты этого многочлена обладают замечательным свойством не меняться при вращении системы координат (см., например, Гельфанд [2]) и называются инвариантами матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Плотность потенциальной энергии должна зависеть в нашем случае только от инвариантов матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для любой матрицы 3×3

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

инвариантами являются три величины: ее след

$$I_1 = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (1.50)$$

величина

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (1.51)$$

и ее определитель $I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon})$. Поскольку \mathcal{W} предполагается однородной функцией второго порядка относительно ε_{ij} , она должна быть линейной комбинацией I_1^2 и I_2 . Принято параметризовать \mathcal{W} следующим образом:

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} ((\lambda + 2\mu)I_1^2 - 4\mu I_2). \quad (1.52)$$

Величины $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ и $\mu = \mu(\mathbf{x})$ называются (*упругими*) *параметрами Ламе*.

Из (1.29) и (1.52) вытекает представление тензора напряжений в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\mathbf{u}). \quad (1.53)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера,

$$\delta_{ij} = 1, \text{ если } i = j, \text{ и } \delta_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j. \quad (1.54)$$

Формула (1.53) получается следующим образом. Рассмотрим сначала случай совпадающих индексов i и j , например, $i = j = 1$. Из (1.29), (1.50), (1.51) и (1.52) следует

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{11}} = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - 2\mu(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),\end{aligned}$$

что совпадает с (1.53) при $i = j = 1$. Рассмотрим теперь различные индексы. При $i = 1, j = 2$ имеем

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{12}} = 2\mu\varepsilon_{21} = 2\mu\varepsilon_{12},$$

что снова согласуется с (1.53). Для других пар индексов вычисление аналогично.

Выражение (1.53) можно также записать в виде

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.55)$$

Из (1.18) и (1.53) можно получить следующее выражение для тензора упругих модулей изотропной среды:

$$c_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (1.56)$$

Плотность поверхностной силы на границе, внешней нормалью к которой служит \mathbf{n} , принимает вид

$$\mathbf{t}_i^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) = \mu n_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda n_i \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (1.57)$$

или

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}] + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}, \quad (1.58)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали.

Уравнения эластодинамики (1.34)–(1.35), с учетом (1.53), можно записать в виде

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathfrak{L}\mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{F}, \quad (1.59)$$

где теперь

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\mathbf{u} &:= (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &+ [\operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \mathbf{u}] + 2(\operatorname{grad} \mu \cdot \operatorname{grad})\mathbf{u}.\end{aligned} \quad (1.60)$$

Здесь использованы обозначения

$$(\mathbf{p} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} = p_j \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} \quad (1.61)$$

и $\ddot{\mathbf{u}} := \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$. Уравнение (1.59) значительно упрощается в случае одно-
родной среды, т. е. в случае, когда λ и μ не зависят от \mathbf{x} . Тогда

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{F}, \quad (1.62)$$

или

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{F}, \quad (1.63)$$

где $\nabla^2 := \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

1.5.2. Следствия положительной определенности \mathcal{W}

Воспользуемся теперь условием положительной определенности плотности потенциальной энергии. Из (1.52) и (1.3) следует, что

$$2\mathcal{W} = 4\mu(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) + (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + 2\lambda(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}).$$

Последнее выражение можно рассматривать как квадратичную форму матрицы 6×6 ,

$$\begin{pmatrix} 4\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

действующей на столбцы вида $(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})^T$, где T обозначает транспонирование. Прилагая к матрице (1.64) критерий Сильвестра⁶, имеем $D_1 = 4\mu > 0$, $D_2 = (4\mu)^2 > 0$, $D_3 = (4\mu)^3 > 0$, $D_4 = (4\mu)^3(\lambda + 2\mu) > 0$, $D_5 = (4\mu)^4(\lambda + \mu) > 0$, $D_6 = 8(2\mu)^5(3\lambda + 2\mu) > 0$. Нетрудно заметить, что вытекающие из неравенств $D_1 > 0$ и $D_6 > 0$ неравенства

$$\mu > 0 \quad (1.65)$$

и

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad (1.66)$$

⁶Симметричная вещественная матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ положительно определена, т. е. $(\mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{h}) > 0$ для любого ненулевого вектора \mathbf{h} , тогда и только тогда, когда $D_1 := A_{11} > 0$, $D_2 := \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} > 0$, ..., $D_n := \det(\mathbf{A}) > 0$, (см., например, Гантмахер [1]).

влекут и все остальные, а потому выражают условие положительной определенности потенциальной энергии.

Условия (1.65) и (1.66) будут подразумеваться далее везде, где будет идти речь об изотропной среде. Отметим еще очевидное их следствие:

$$\lambda + \mu > 0. \quad (1.67)$$

1.6. Баланс энергии

Уравнение баланса энергии в упругой среде можно было бы вывести непосредственно из принципа Гамильтона как следствие инвариантности лагранжиана относительно времени. Мы получим его как простое следствие уравнений эластодинамики.

Вернемся к случаю общей анизотропии. Умножим (1.32) на $\dot{u}_j := \frac{\partial u_j}{\partial t}$ и просуммируем по j , откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \dot{u}_i) = F_j \dot{u}_j.$$

Заметим, что последнее выражение в квадратных скобках можно преобразовать к виду

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\sigma_{ij}}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2\mathcal{W}.$$

Отсюда получается уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (1.68)$$

где

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{W} \quad (1.69)$$

— плотность энергии, а вектор \mathbf{S} , определенный выражением

$$\mathbf{S}_j = -\sigma_{jp} \frac{\partial u_p}{\partial t}, \quad (1.70)$$

мы называем вектором плотности потока энергии, или вектором Умова.

Для интерпретации тождества (1.68) проинтегрируем обе его части по произвольному объему среды Ω с учетом того, что на $\partial\Omega$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = -\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j \dot{u}_i = -\mathbf{t}^n(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}},$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathcal{E} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}^n(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS. \quad (1.71)$$

Равенство (1.71) показывает, что приращение в единицу времени энергии в объеме Ω равно работе, тоже за единицу времени, объемных и поверхностных сил. Выражение $-\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = -\mathbf{t}^n(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS$ имеет ясную интерпретацию — это работа внешних поверхностных сил над элементом поверхности dS .

1.7. Гармонические по времени решения

Сейчас мы введем комплексные решения, рассмотрение которых является удобным и распространенным техническим средством анализа линейных волновых процессов.

1.7.1. Основные определения

Оказывается, очень полезно рассматривать класс частных решений уравнений эластодинамики со специальной зависимостью от времени вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.72)$$

Эти решения называются *гармоническими по времени*. Параметр ω мы называем *частотой*⁷. Обычно считается, что частота положительна. Некоторые авторы пишут в формуле (1.72) $e^{+i\omega t}$ вместо $e^{-i\omega t}$; в результате все их формулы получаются комплексно сопряженными к нашим. Не зависящий от времени вектор \mathbf{u} часто также называется смещением, и его временную зависимость часто опускают. Удобно также оказывается рассматривать комплексные объемные и поверхностные силы

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \omega) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega) e^{-i\omega t} \quad (1.73)$$

с той же временной зависимостью. Мы будем использовать для гармонических по времени величин \mathbf{u} , \mathbf{F} , \mathbf{f} , ... соответствующие буквы \mathbf{u} , \mathbf{F} , \mathbf{f} , ...

Говоря, что комплексный вектор вида (1.72) удовлетворяет уравнениям эластодинамики (1.32), мы имеем в виду, что уравнениям удовлетворяют векторы с вещественными компонентами $\text{Re } \mathbf{u} = (\text{Re } u_1, \text{Re } u_2, \text{Re } u_3)$ и $\text{Im } \mathbf{u} = (\text{Im } u_1, \text{Im } u_2, \text{Im } u_3)$.

Разумеется, комплексные решения уравнений (1.32) нельзя понимать как физические смещения непосредственно. Традиционная интерпретация комплексного вектора смещений состоит в приписывании соответствующего физического смысла его вещественной части

$$\text{Re } \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{u}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} e^{-i\omega t} + \mathbf{u}^* e^{i\omega t}). \quad (1.74)$$

⁷Правильнее было бы называть ω *круговой частотой*, но мы везде будем пользоваться кратким термином частота.

Здесь и везде далее * означает комплексное сопряжение. Вполне можно было бы придавать физический смысл и мнимой части; действительная часть выбрана нами для определенности.

Физические смещения, деформации и напряжения определяются через соответствующие комплексные величины естественным образом, например

$$\varepsilon_{ij}(\operatorname{Re} \mathbf{u}) = \frac{1}{2}[\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^*)] = \frac{1}{2}[\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}e^{-i\omega t}) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^*e^{i\omega t})]. \quad (1.75)$$

Соответствующие плотности кинетической и потенциальной энергии равны

$$\mathcal{K} = \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{Re} \dot{\mathbf{u}} = \frac{\rho\omega^2}{8} (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^* e^{2i\omega t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} e^{-2i\omega t}) \quad (1.76)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} \sigma_{jk}(\operatorname{Re} \mathbf{u}) \varepsilon_{jk}(\operatorname{Re} \mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{8} (\sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk} + \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* + \sigma_{jk} \varepsilon_{jk} e^{2i\omega t} + \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk}^* e^{2i\omega t}). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Здесь

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}(\mathbf{u}), \quad \varepsilon_{jk}^* = \varepsilon_{jk}(\mathbf{u}^*), \quad \sigma_{jk} = \sigma_{jk}(\mathbf{u}), \quad \sigma_{jk}^* = \sigma_{jk}(\mathbf{u}^*). \quad (1.78)$$

Отметим, что два первых слагаемых в правой части (1.77) равны.

Физический смысл объемных и поверхностных сил приписывается выражениям

$$\operatorname{Re} \mathbf{F} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} e^{-i\omega t} + \mathbf{F}^* e^{i\omega t}) \quad (1.79)$$

и

$$\operatorname{Re} \mathbf{f} = \frac{1}{2} (\mathbf{f} e^{-i\omega t} + \mathbf{f}^* e^{i\omega t}). \quad (1.80)$$

Например, работа объемных сил относительно комплексного смещения $\mathbf{u} = \mathbf{u} e^{-i\omega t}$ равна

$$\frac{1}{4} (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^* + \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} e^{-2i\omega t} + \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}^* e^{2i\omega t}). \quad (1.81)$$

Уравнения эластодинамики в гармоническом случае приобретают вид

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{l}\mathbf{u} = -\mathbf{F}, \quad (1.82)$$

$$\mathbf{l} = \mathfrak{L} + \rho\omega^2 \mathbf{I}, \quad (\mathbf{l}\mathbf{u})_j \equiv l_j(\mathbf{u}) = \frac{\partial \sigma_{jp}(\mathbf{u})}{\partial x_p} + \rho\omega^2 u_j. \quad (1.83)$$